

DISPENSE

# Analisi II

---

Ovvero *Analisi Vettoriale*

Riccardo Mordente

Layout a cura di TecoSaur

Versione 0.5.2

22 febbraio 2024

5	Capitolo 1 Ripasso
20	Capitolo 2 Funzioni multidimensionali
34	Capitolo 3 Differenziabilità
66	Capitolo 4 Convessità, Funzioni Implicite
79	Capitolo 5 Integrali curvilinei e Forme differenziali
97	Capitolo 6 Successioni e Serie di funzioni
112	Capitolo 7 Insiemi numerabili e proprietà
116	Capitolo 8 Superfici, Integrali
162	Capitolo 9 Equazioni Differenziali

# Prefazione

Agli studenti del corso di Analisi Vettoriale (o a chiunque entri in possesso di questo file),

Queste dispense nascono, così come quelle di Analisi I, di Laboratorio di Meccanica e di tutti gli appunti mandati fin ora, con lo scopo di racchiudere tutto ciò che è stato fatto nel corso, cercando di mantenersi il più fedeli possibile alle lezioni svolte in aula durante l'anno Accademico 2023/2024. Il documento possiede infatti non solo teoremi e dimostrazioni, ma anche molti degli esempi e degli esercizi (ovviamente non tutti), il che le rende particolarmente lunghe in termini di pagine.

Questi appunti sono molto banalmente uno strumento di ripasso, costruite in modo organizzato, per cercare di non fare confusione con tutti gli argomenti del corso. Ho cercato poi di dare più spazio possibile ai calcoli espliciti, delle volte anche superflui, e alle rappresentazioni grafiche, in modo da rendere il tutto più scorrevole e comprensibile.

Il file è stato scritto e revisionato da una persona sola, per cui è molto probabile che vi siano errori di ogni specie e tipo. Per questo motivo, qualora doveste trovare tracce di questi errori vi chiedo di contattarmi alla mail `riccardo.mordente@gmail.com`. Il file è graficamente ispirato al layout gratuito a cura di Tecosaur, via <https://github.com/tecosaur/BMC>.

# 1

# Ripasso



## Sommario

- 1.1 Spazi Vettoriali e Norme, 6
- 1.2 Palle, 9
- 1.3 Topologia in  $\mathbb{R}^n$ , 12
- 1.4 Successioni, 18

In questa sezione ci occuperemo di rivedere alcune definizioni viste nel corso di Analisi (oppure le vedremo ma sotto definizioni più generiche e non solo in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^2$ ) che, essendo state fatte a inizio corso ed essendo definizioni "*minori*" (nel senso che servono per dimostrare cose più importanti, o sono lemmi di poche righe, magari menzionati una volta sola) è probabile che siano state scordate.

## 1.1 Spazi Vettoriali e Norme

### **Definizione 1:** Spazio Vettoriale

Definiamo come **Spazio Vettoriale** su  $\mathbb{R}$  l'insieme  $V$  dotato delle seguenti operazioni:

- Somma, ovvero

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longrightarrow v + w \end{aligned}$$

- Prodotto scalare, ovvero

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longrightarrow \lambda \cdot v \end{aligned}$$

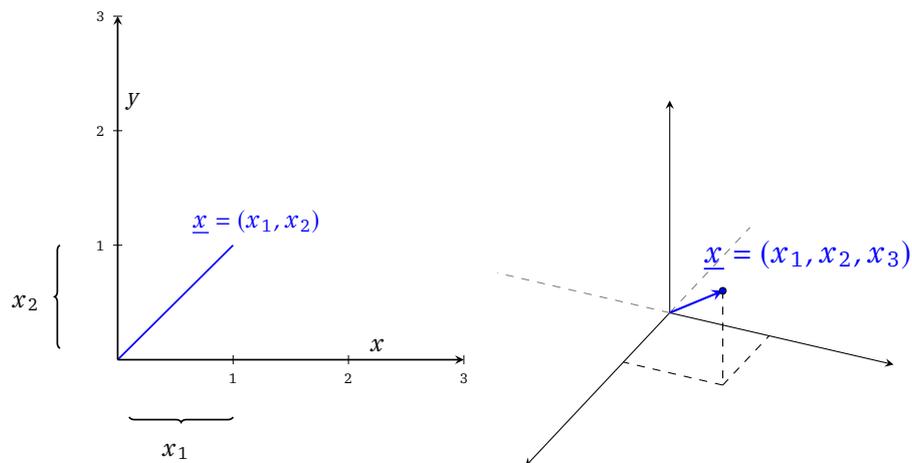
Esempi di spazi vettoriali sono  $\{0\}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ ....

### **Definizione 2:** Norma

Dato il vettore  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definiamo **Norma** in  $\mathbb{R}^n$  il seguente oggetto:

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.1)$$

*Osservazioni:* se  $n = 1$  allora  $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ . In  $\mathbb{R}^2$  invece abbiamo la distanza tra due punti (teorema di Pitagora), e in  $\mathbb{R}^3$  la distanza in tre dimensioni.



Le proprietà della norma sono:

- La norma è sempre positiva (o al più 0):  $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  inoltre  $\|x\| = 0 \iff x = (0 \dots 0)$ ;
- Omogeneità, ovvero  $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$ , e questo vale  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

### **Definizione 3:** Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Dati i vettori  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$  e  $\underline{y} = (y_1 \dots y_n)$ , il prodotto scalare tra i due vettori è:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.2)$$

Geometricamente (tranne quando siamo in  $n = 1$  che è abbastanza scontato), possiamo vedere come in uno spazio tridimensionale il prodotto scalare può essere visto (e ricondotto matematicamente) alla forma (con  $\theta$  angolo tra i due vettori):

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos(\theta)$$

### **Teorema 1:** Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dati i vettori  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$  e  $\underline{y} = (y_1 \dots y_n)$ , vale la seguente disuguaglianza:

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \quad (1.3)$$

### ✓ Dimostrazione 1: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Da quanto detto poco sopra sappiamo che

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \underbrace{|\cos(\theta)|}_{\leq 1} \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

### π Teorema 2: Disuguaglianza Triangolare

Dati i vettori qualsiasi  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$  e  $\underline{y} = (y_1 \dots y_n)$ , vale similmente a prima la seguente disuguaglianza:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad (1.4)$$

### ✓ Dimostrazione 2: Disuguaglianza Triangolare

Partendo dal quadrato della norma della somma dei vettori sviluppiamo:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{=\|\underline{x}\|^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{=\|\underline{y}\|^2} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i y_i)}_{=2\underline{x} \cdot \underline{y}}$$

E quindi

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\underline{x} \cdot \underline{y}$$

Ma sicuramente  $2\underline{x} \cdot \underline{y} \leq 2|\underline{x} \cdot \underline{y}|$  che a sua volta, per il [Equazione 1.1](#) è  $\leq 2 \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ , quindi:

$$\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\underline{x} \cdot \underline{y} \leq \underbrace{\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2 \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}_{=(\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2}$$

E concludiamo che, siccome la disuguaglianza vale se i membri sono elevati al quadrato, varrà in generale che

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

Casi particolari di norme sono (intesi come notazione):

- $\|\underline{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  con  $p \geq 1$ ;
- $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$  ovvero la **Norma infinita**

## 1.2 Palle

Sempre in uno spazio vettoriale normato, definiamo quella che in matematica è una *palla*.

### Definizione 4: Palla

Dato lo spazio vettoriale normato  $(V, \| \cdot \|)$ , e dati  $r > 0, \underline{p} \in V$ , definiamo come **PALLA** di raggio  $r$  e centro  $\underline{p}$  il seguente oggetto:

$$B_r(\underline{p}) := \{ \underline{x} \in V \mid \| \underline{x} - \underline{p} \| < r \}$$

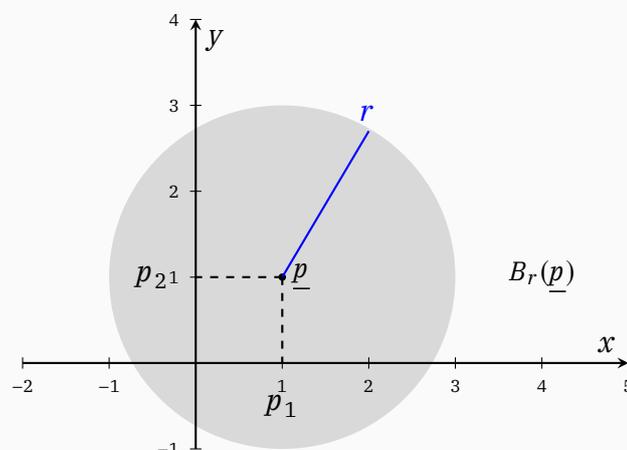
Il motivo di definire la palla in questo modo, è che essa è diversa da un cerchio o da una sfera (quest'ultima in particolare non è un solido come ci hanno fatto falsamente credere per anni), poichè non comprende i punti che sono a distanza  $r$  dal centro, ovvero la circonferenza per capirci. Il secondo motivo è che con una definizione di questo tipo, che non si *lega* al numero di dimensioni in cui siamo, possiamo usare la palla per tutta una serie di definizioni che vedremo dopo su un qualsiasi  $\mathbb{R}^n$ .

### Esempio 1

Facciamo un paio di esempi di palle:

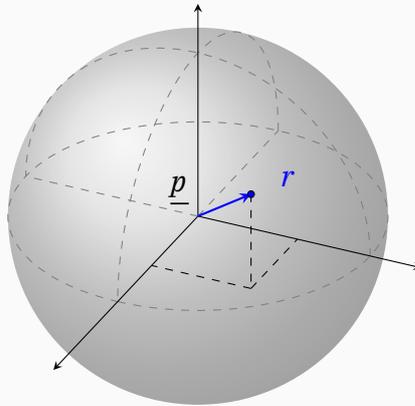
- In due dimensioni, ovvero nello spazio  $\mathbb{R}^2$  abbiamo ovviamente un cerchio senza la circonferenza, che possiamo riscrivere secondo definizione in questo modo:

$$\begin{aligned} B_r(\underline{p}) &= \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \| (x, y) - (p_1, p_2) \| < r \} = \\ &= \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2} < r \right\} \\ &= \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 < r^2 \} \end{aligned}$$



## Esempio 1 continued

- In tre dimensioni invece, ovvero  $\mathbb{R}^3$ , abbiamo chiaramente una impropriamente detta "sfera", e riguardo a quanto scritto sopra basta aggiungere una coordinata  $z$ . Generalizzando in  $n$  dimensioni abbiamo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  coordinate del vettore  $\underline{x}$ .



Per quanto detto prima, definiamo la palla in modo abbastanza ovvio e semplice con:

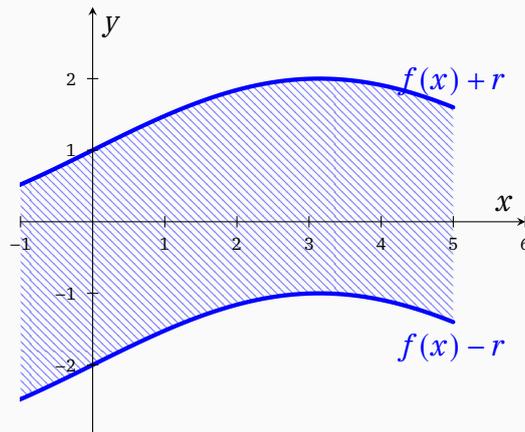
$$B_r(\underline{p}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 + (z - p_3)^2 < r^2\}$$

### Esempio 2

Facciamo un altro esempio, che può sembrare molto più complicato ma non lo è più di tanto. Abbiamo una palla, ma stavolta il centro è una funzione. Data  $f \in C^0([a; b])$  e sempre seguendo la definizione scriviamo:

$$\begin{aligned} B_r(\underline{f}) &= \{g \in C^0([a; b]) \mid \|f - g\|_\infty < r\} = \\ &= \{g \in C^0([a; b]) \mid |f(x) - g(x)| < r \forall x \in [a; b]\} = \\ &= \left\{ g \in C^0([a; b]) \mid \begin{cases} f(x) - g(x) < r \\ f(x) - g(x) > -r \end{cases} \forall x \in [a; b] \right\} = \\ &= \{g \in C^0([a; b]) \mid f(x) - r < g(x) < f(x) + r \forall x \in [a; b]\} \end{aligned}$$

Dando un'interpretazione grafica, possiamo immaginare tutte le possibili funzioni "racchiuse" nell'area delimitata dalla funzione  $f(x)$  traslata di  $r$ :



Ricordiamo poi, che la notazione  $\|f - g\|_\infty$  indica la **norma infinita** ovvero  $\sup_{x \in [a; b]} \{|f(x) - g(x)|\}$

## 1.3 Topologia in $\mathbb{R}^n$

Mettiamo di seguito una serie di definizioni, osservazioni ed esempi che fungono come ripasso della topologia in  $\mathbb{R}^n$  (che in Analisi I era stata fatta in  $\mathbb{R}$  per semplicità), ma che vale in un qualsiasi spazio normato.

### **Definizione 5:** Punto interno

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , diciamo che  $p \in E$  è un **punto interno** di  $E$  se  $\exists r > 0 : B_r(p) \subseteq E$ , ovvero se possiamo definire una palla di qualsiasi dimensione che sia tutta contenuta nell'insieme.

### **Definizione 6:** Insieme dei punti interni

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , chiamiamo  $\overset{\circ}{E}$  l'**Interno** di  $E$ , ovvero l'insieme dei suoi punti interni.

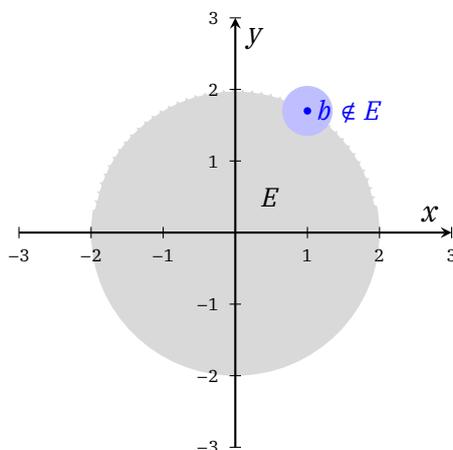
### **Definizione 7:** Punto di frontiera

Chiamiamo  $p \in \mathbb{R}^n$  un **punto di frontiera** se

$$\forall r > 0, \begin{cases} B_r(p) \cap E \neq \emptyset \\ B_r(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset \end{cases}$$

Il che implica che il punto può anche non appartenere all'insieme.

Per fare un esempio, se prendiamo un insieme aperto, ovvero del tipo  $]a; b[$  (daremo dopo una definizione, ma si suppone che sappiamo tutti cosa voglia dire), un punto come  $b$  è un punto di frontiera perchè presa una qualsiasi palla, metà è contenuta nell'insieme e metà no.



### **Definizione 8:** Bordo

L'insieme dei punti di frontiera di un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **Bordo** (in senso topologico) oppure **Frontiera** e si indica con

$$\partial E$$

### **Definizione 9:** Punto di accumulazione

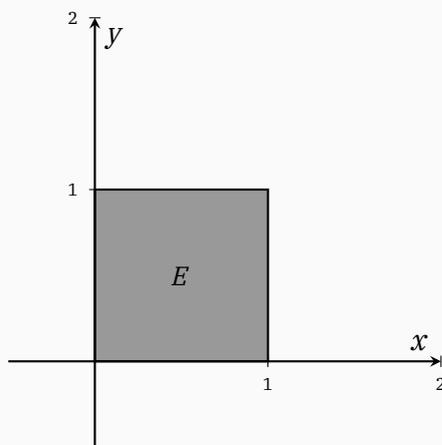
Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  insieme infinito, diciamo che  $p \in E$  è un **punto di accumulazione** per  $E$  se  $\forall r > 0, (B_r(p) \setminus p) \cap E \neq \emptyset$ .

*Osservazione:* un punto interno di  $E$  è necessariamente anche di accumulazione, poichè è impossibile prendere una palla di qualsiasi dimensione, per quanto piccola, che non contenga altri elementi di  $E$ , detto in modo più formale  $\exists \tilde{r} > 0 : B_{\tilde{r}}(p) \subseteq E$  (che è a partire dalla definizione di punto interno), e una qualsiasi palla per quanto più grande conterrà comunque elementi di  $E$ .

### **Esempio 3**

Facciamo due esempi:

- Prendiamo l'insieme  $E = [0; 1] \times [0; 1]$ , ovvero:



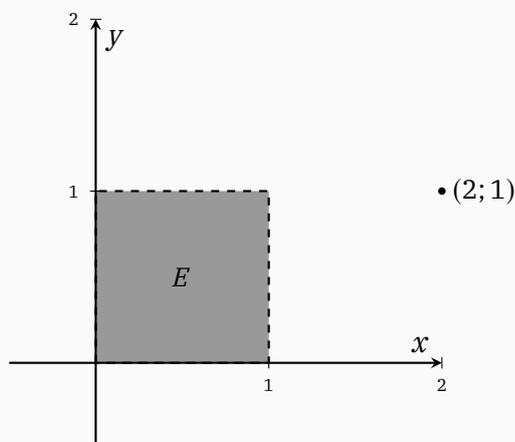
In questo caso  $\partial E$  sarebbero i lati del quadrato, e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Insieme dei punti} \\ \text{di accumulazione di } E \end{array} \right\} \equiv \{E\}$$

Poichè sia i punti interni che quelli di frontiera in questo caso sono di accumulazione.

📎 Esempio 3 continued

- Spostandoci su un esempio simile abbiamo  $D = ((0; 1) \times (0; 1)) \cup ((2; 1))$  ovvero l'insieme di prima ma senza i lati più un punto a parte:



In questo caso  $\partial D$  è sempre i lati del quadrato (punti di frontiera anche se non appartengono all'insieme) più il punto  $(2;1)$ , mentre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Insieme dei punti} \\ \text{di accumulazione di } E \end{array} \right\} \equiv \{E\}$$

E questo perchè stavolta i punti di frontiera non sono di accumulazione (devono appartenere all'insieme, o comunque "avere intorno" altri elementi dell'insieme).

📖 **Definizione 10:** Punto isolato

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  e  $p \in E$ , questo è un **Punto Isolato** per  $E$  se non è un punto di accumulazione, ovvero se  $\exists r > 0 : \{B_r(p) \setminus p\} \cap E = \emptyset$

📖 **Definizione 11:** Insieme aperto

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  esso si dice **aperto** se  $E \equiv \overset{\circ}{E}$ , ovvero se ogni punto di  $E$  è un punto interno.

📐 **Lemma 1**

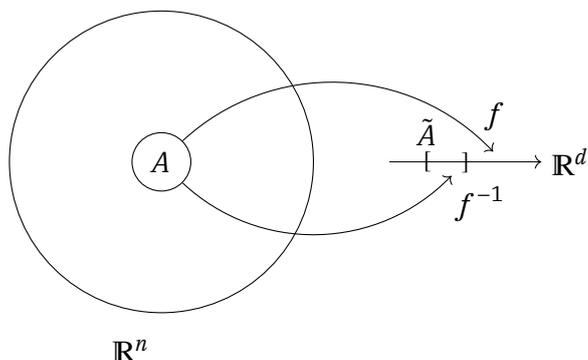
Operando tra vari insiemi, vale che:

- Dati  $A_i$  aperti con  $i \in I \implies A = \bigcup_{i \in I} A_i$  è aperto;
- Dati  $A_1..A_n$  aperti  $\implies A = A_1 \cap \dots \cap A_n$  è aperto;

### $\pi$ Proposizione 1

Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  (continua) con  $A$  aperto, sia  $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}^d$  allora  $f^{-1}(\tilde{A}) := \{\underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) \in \tilde{A}\}$ , ovvero la preimmagine di  $\tilde{A}$  tramite  $f$ .

Vediamo questa proposizione graficamente per evitare confusione:



### $\text{📄}$ Esempio 4

Prendiamo la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $\tilde{A} = (a; +\infty)$ , allora avremo che

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{A}) &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) \in (a; +\infty)\} \\ &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) > a\} \end{aligned}$$

Che è un insieme aperto (c'è il maggiore ma non l'uguale), e lo stesso varrà se prendo  $\tilde{A} = (-\infty; b)$  oppure  $\tilde{A} = (a; b)$ . Il senso è che questa proposizione serve a dire che insiemi di questa forma sono aperti in modo *facile*.

### $\text{📖}$ Definizione 12: Insieme chiuso

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  esso si dice **chiuso** se non è aperto (ovvio), ma più formalmente se il suo complementare (ovvero  $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ ) è aperto.

### $\text{📖}$ Definizione 13: Chiusura

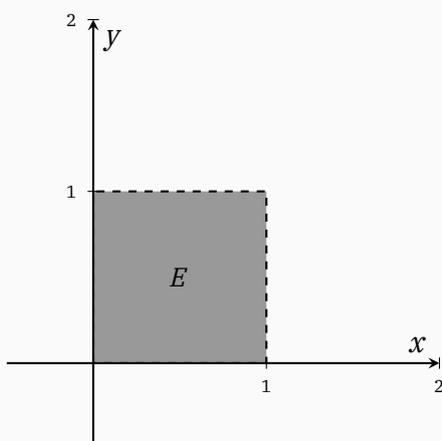
Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$ , chiamiamo **Chiusura di  $E$**  il seguente oggetto:

$$\overline{E} := E \cup \partial E$$

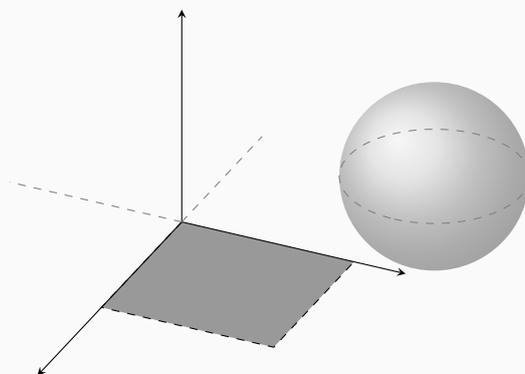
Si può anche definire come il più piccolo insieme che contiene  $E$ .

### Esempio 5

L'insieme  $Q = (0; 1) \times (0; 1)$  (simile a  $D$  visto prima) è aperto in  $\mathbb{R}^2$ :



Se ci spostiamo invece in  $\mathbb{R}^3$ , paradossalmente lo stesso piano diventa chiuso, e questo perché il suo complementare è aperto. Siccome lo spessore del piano è 0, qualsiasi palla io possa prendere (che è comunque tridimensionale e con parametro  $z > 0$ ) essa non sarà mai contenuta tutta nell'insieme, quindi per la [Definizione 1.3](#) nessun punto è interno, mentre ogni punto del complementare è aperto (inoltre anche senza passare per il complementare, se non ha punti interni o pure se ne avesse solo uno non interno non è un insieme aperto, e quindi è chiuso).



Per convenzione, diciamo che l'insieme  $\emptyset$  è aperto.

### $\pi$ Lemma 2

Operiamo con gli insiemi chiusi esattamente come facciamo per quelli aperti:

- Dati  $C_i$  chiusi con  $i \in I \implies C = \bigcap_{i \in I} C_i$  è chiuso;
- Dati  $C_1 \dots C_n$  chiusi  $i \implies C = \bigcup_{i=1}^n C_i$  è chiuso;

### $\equiv$ Definizione 14

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **Limitato** se  $\exists r > 0, p \in \mathbb{R}^n : E_r(p)$  ovvero se può essere tutto contenuto in una palla finita.

*Osservazione:*

Possiamo dire che E limitato  $\iff \exists R > 0 : E \subseteq B_R(0)$ , vediamo perchè:

$\Leftarrow$  per definizione con  $\underline{p} = 0$ ;

$\implies$  per definizione poichè  $E \subseteq B_r(\underline{p}) \implies E \subseteq B_{\|\underline{p}\|+r}(0)$

### $\equiv$ Definizione 15

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto è detto **Connesso** se  $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e diversi dagli insiemi  $A, \emptyset$  tali che  $A_1 \cup A_2 = A$  e  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

## 1.4 Successioni

Vediamo adesso definizioni ed esempi delle successioni in uno spazio normato  $\mathbb{R}^k$ .

### Definizione 16

Chiamiamo **Successione** la funzione del tipo

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ n &\longrightarrow \underline{a}_n = (a_{1n} \dots a_{kn}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

### Proposizione 2: Convergenza di successioni

La successione  $\underline{a}_n$  converge a  $\underline{L} \in \mathbb{R}^k$  (in cui  $\underline{L} = (L_1, L_2 \dots L_n)$ ) se  $\|\underline{a}_n - \underline{L}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Osservazione:* Siccome  $\|\underline{a}_n - \underline{L}\| = \left( \sum_{i=1}^k |a_{in} - L_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  per definizione di norma, allora  $\|\underline{a}_n - \underline{L}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |a_{in} - L_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i = 1 \dots k$  ovvero la successione converge se e solo se ogni parametro del vettore  $\underline{a}_n$  converge a sua volta verso il rispettivo parametro  $L_i$  del vettore  $\underline{L}$ .

### Esempio 6

Prendiamo la successione  $\underline{a}_n = (e^{-n} \cdot (\sin(n) + n), \sin(\arctan(n)))$ , e vediamo a che vettore  $\underline{L}$  converge, prendendo separatamente i termini:

$$|e^{-n} \cdot (\sin(n) + n)| = e^{-n} \cdot n \left| 1 + \underbrace{\frac{\sin(n)}{n}}_{\leq 2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\underbrace{\sin(\arctan(n))}_{\rightarrow \pi/2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Quindi concludiamo che  $\underline{a}_n \rightarrow \underline{L} = (0; 1)$ .

**☰ Definizione 17:** Insieme Compatto

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice compatto (per successioni) se ogni successione  $\{\underline{a}_n\} \subseteq E$  ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento di  $E$ , cioè se  $\exists \underline{a}_j \rightarrow \underline{a} \in E$

**π Teorema 3:** Teorema di Heine-Borel

$E \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto  $\iff E$  è chiuso e limitato.

# 2

# Funzioni multi-dimensionali



## Sommario

- 2.1 Funzioni in più variabili, 21
- 2.2 Curve, 22
- 2.3 Limiti e continuità in  $\mathbb{R}^2$ , 29

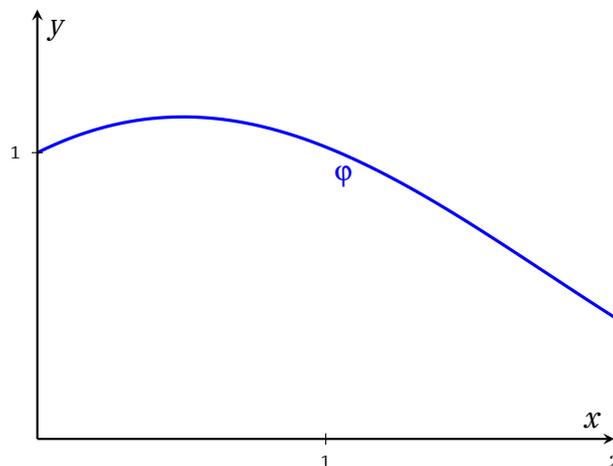
## 2.1 Funzioni in più variabili

Introduciamo adesso un po' di notazione e di elementi riguardanti le funzioni in più variabili (dando per scontate alcune cose basilari perché in teoria andrebbero viste nel corso di Analisi).

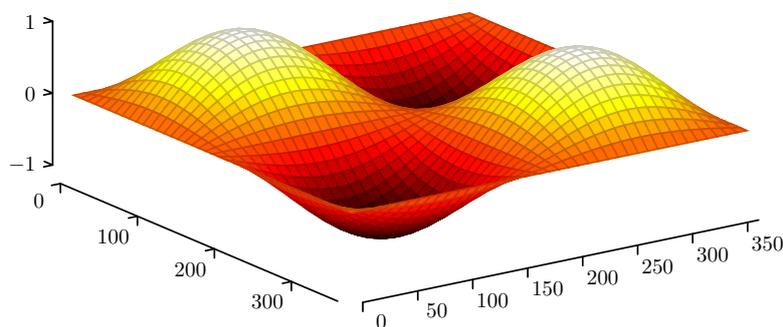
### 2.1.1 Tipi di Funzioni

Una funzione in più variabili è del tipo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con parametri qualsiasi, ma quelle di cui facciamo un uso più comune sono:

- $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ovvero la **Curva**, un oggetto unidimensionale che vive su più dimensioni, come per esempio  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;



- $r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ovvero **Superfici**, che come le curve vivono su piani superiori (in genere però si lavora su tre dimensioni) ma che non hanno spessore;



- $B : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  come per esempio **Campi vettoriali** o di forze;
- $\rho : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  come per esempio **Densità**

## 2.2 Curve

Vediamo adesso più nel dettaglio le curve e le loro applicazioni.

### **Definizione 18**

Chiamiamo **Curva** un'applicazione continua del tipo:

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Parametrizziamo poi la curva (poichè essa dipende appunto da un parametro solo) in questo modo:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ x_3 = \varphi_3(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}, \quad t \in D$$

*Osservazione:* una curva è di una dimensione ma vive in più dimensioni: in due abbiamo una cosa simile al grafico di funzioni, in tre abbiamo una linea che "vaga" per lo spazio  $x, y, z$ .

### **Definizione 19: Sostegno**

Data la curva  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , chiamiamo **Sostegno** della curva l'insieme:

$$\{\varphi(t) | t \in D\} \equiv \varphi(D) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

### **Definizione 20: Curva Semplice**

Data la curva  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , essa si dice **Semplice** se iniettiva in  $\overset{\circ}{D}$ , ovvero se dati  $\underline{s}, \underline{t} \in \overset{\circ}{D} : \varphi(\underline{s}) = \varphi(\underline{t}) \implies \underline{s} = \underline{t}$ .

Osservazione: Data la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

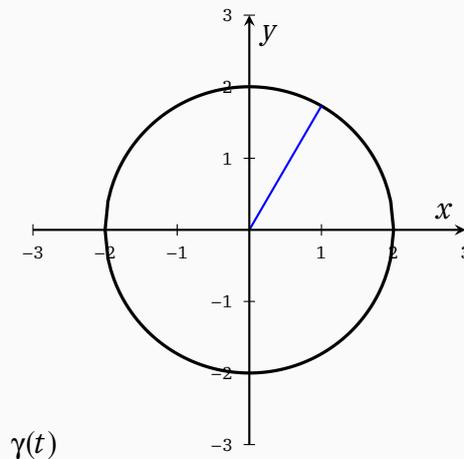
Se  $\varphi$  ha una componente  $\varphi_j : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  iniettiva allora è semplice, perchè seguendo la definizione se  $\underline{s}, \underline{t} \in \overset{\circ}{D} : \varphi(\underline{s}) = \varphi(\underline{t})$  e in particolare se  $\varphi_j(\underline{s}) = \varphi_j(\underline{t})$  allora  $\varphi_j$  iniettiva in  $\overset{\circ}{D}$  e quindi  $\underline{s} = \underline{t}$ , ma non è vero il viceversa (una curva può essere semplice anche se nessuna componente presa singolarmente è iniettiva). Vediamo un esempio:

### Esempio 7

La curva in figura è:

$$\gamma = \begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases}, t \in [0; \pi] = D$$

Il sostegno della curva è ovviamente l'equazione della circonferenza, ovvero  $\gamma(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ .



Seno e Coseno non sono iniettive, mostriamo che  $\gamma$  è semplice comunque: prendiamo due punti  $s, t \in [0; \pi]$  tali che

$$\begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(s) \end{pmatrix} = \underline{\gamma}(s) = \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R \sin(t) \\ R \cos(s) \end{pmatrix}$$

Quindi

$$R \cos(s) = R \cos(t) \implies \begin{cases} s = t \\ s = 2\pi - t \end{cases}$$

📄 Esempio 7 continued

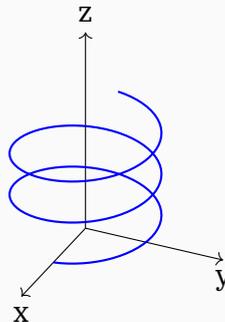
Abbiamo trovato due opzioni per l'uguaglianza dei due punti. La prima segue la definizione di curva semplice ma la seconda è un problema. Usando l'altra disuguaglianza:

$$\begin{aligned} R \sin(s) = R \sin(t) &\implies \sin(t) = \sin(2\pi - t) \implies \sin(t) = 0 \implies \\ &\implies t = \pi \implies s = 2\pi - t = \pi \implies \boxed{s = t} \end{aligned}$$

📄 Esempio 8

L'elica cilindrica di passo  $2\pi|k| > 0$  ha la seguente parametrizzazione e forma:

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



Ed è semplice perchè  $z$  è iniettiva in  $\mathbb{R}$ , quindi ci basta come condizione.

📄 **Definizione 21:** Curva Chiusa

Una curva  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **Chiusa** se  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . L'elica di prima è una curva chiusa se prendiamo come intervallo di definizione  $[0; 2\pi]$ .

📄 **Definizione 22:** Curva Derivabile

Una curva  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **Derivabile** se lo sono tutte le sue componenti.

### Definizione 23: Curva Regolare

Una curva  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **Regolare** se vale che:

$$\begin{cases} \varphi \in C^1([a; b]) \\ \underline{\varphi}'(t) \neq 0 \forall t \in D \end{cases}$$

### Definizione 24: Versore Tangente

Data la curva  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se esiste il vettore tangente diverso da 0, posso definire il **Versore Tangente**:

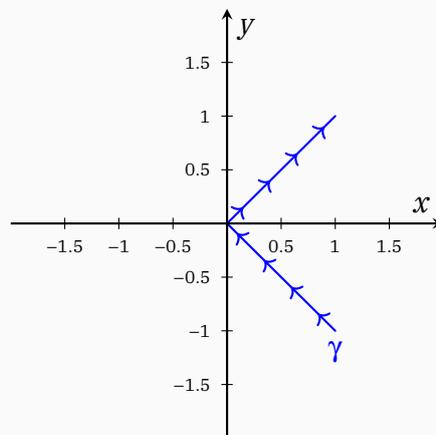
$$I(t) := \frac{\underline{\varphi}'(t)}{\|\underline{\varphi}'(t)\|}$$

### Esempio 9

La curva:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = |t| \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1; 1]$$

Non è chiusa per ovvi motivi, e non è neanche derivabile poiché la componente  $x(t)$  non è derivabile in ogni punto (in particolare in 0).



### Definizione 25: Curva Regolare a tratti

Data la curva  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , essa si dice **Regolare a tratti** se posso dividere  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$  chiusi e tali che  $\varphi|_{D_j} : D_j \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  è regolare  $\forall j = 1..n$ .

## 2.2.1 Curve in Forma Cartesiana

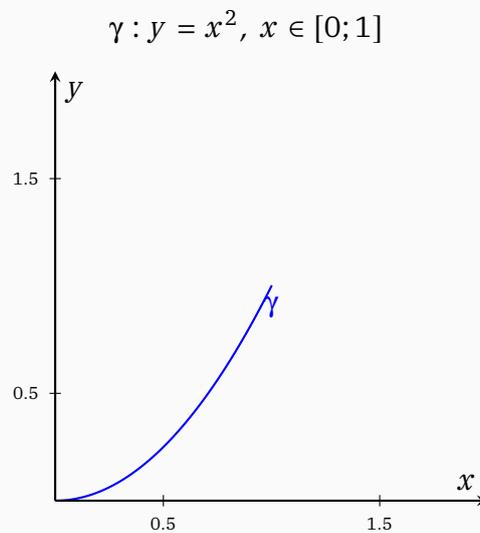
Sia la curva  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  il grafico di una funzione  $y = f(x)$  con  $f \in C^1([a; b])$ , cioè  $\varphi$  è la legge  $\varphi(x) = (x, f(x))$  in cui  $x$  è il parametro unidimensionale. Siccome  $\varphi'(x) = (1; f'(x))$  e il modulo della derivata è sempre maggiore di 0, siccome:

$$\|\varphi'(x)\| = \sqrt{1^2 + [f'(x)]^2} \geq 1$$

E dalla ?? sappiamo che la curva deve essere continua (è legge di funzione continua) e deve avere derivata diversa da 0 (non maggiore).

### Esempio 10

La curva:



È espressa in forma cartesiana. È inoltre non chiusa, regolare e derivabile.

## 2.2.2 Curve in Forma Polare

Similmente alle curve in forma cartesiana, quelle in forma polare utilizzano le coordinate polari per identificare la curva, e possono essere utili per alcuni casi particolari (come le varie spirali che seguono una legge con parametro  $\theta$ ). Una curva di questo tipo è chiaramente  $\rho(\theta)$  con  $\theta \in [\theta_0; \theta_1]$  e il trasferimento in forma cartesiana è abbastanza immediato:

$$\varphi(\theta) : \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [\theta_0; \theta_1]$$

Per verificare se una curva è regolare in coordinate polari facciamo la sostituzione e calcoliamo:

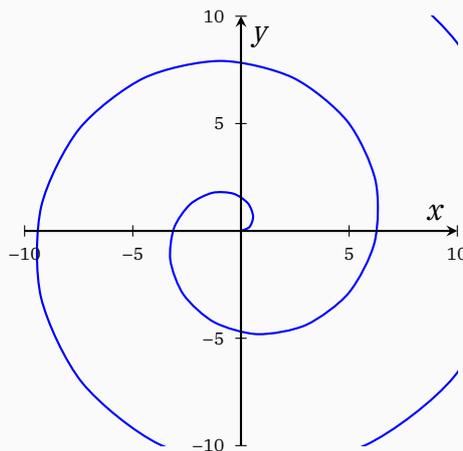
$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{cases} &= \begin{cases} \rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta) \\ \rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta) \end{cases} \implies |\varphi'(\theta)| = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \\ &= \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} \end{aligned}$$

E quindi concludiamo che:

$$\text{Curva regolare} \iff \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} \neq 0$$

### Esempio 11: Spirale di Archimede

La spirale di Archimede ha forma:  $\rho(\theta) = k\theta$ ,  $\begin{cases} k > 0 \\ \theta \in [0; 3\pi] \end{cases}$

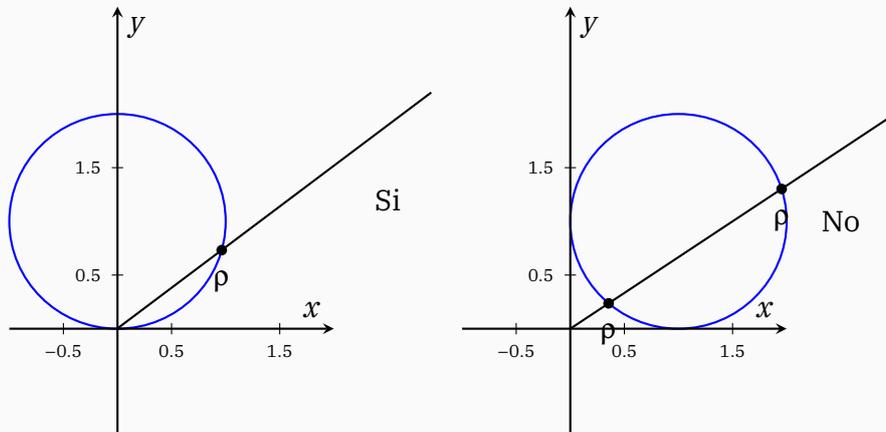


Per verificare la regolarità della curva calcolo:

$$\sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} = \sqrt{k^2 + k^2\theta^2} > 0 \forall \theta \in [0; 3\pi] \implies \boxed{\text{Curva Regolare}}$$

**! Attenzione 1**

Non tutte le curve si possono rappresentare in forma polare. Per esempio, una circonferenza tangente all'origine si, perchè se traccio il vettore  $\rho$  esso incontra un solo punto della ciconferenza, mentre una circonferenza traslata non va bene:



Chiaramente la retta tangente a una curva regolare nel punto  $P_0$  è:

$$r(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \cdot t, t \in \mathbb{R}$$

## 2.3 Limiti e continuità in $\mathbb{R}^2$

Discutiamo ora definizione e alcuni esempi di risoluzione di limiti in due variabili (che sono leggermente più complicati di quelli in una variabile). La teoria resta la stessa, nel senso che, almeno nella maggior parte dei casi, le definizioni di limite a valori finiti o infiniti per valori tendenti al finito o all'infinito sono le stesse.

### **Definizione 26:** Limiti finiti $\rightarrow$ finiti

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $D$ . Sia poi  $\underline{L} \in \mathbb{R}^d$ , allora la funzione tende al vettore  $\underline{L}$  con le condizioni di limite per le funzioni in una variabile, ovvero:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f = \underline{L} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \| \underline{f}(\underline{x}) - \underline{L} \| < \varepsilon \forall \underline{x} \in D : 0 < \| \underline{x} - \underline{x}_0 \| < \delta_\varepsilon$$

*Osservazione:* esattamente come discusso per la convergenza di successioni, una funzione tende a un certo vettore se ogni variabile tende alla componente  $i$ -esima del vettore che è limite per definizione, ovvero:

$$\begin{aligned} \text{Sia } \underline{f}(\underline{x}) &= (f_1(x_1) \dots f_n(x_n)) \text{ e } \underline{L} = (L_1 \dots L_n), \text{ allora} \\ \underline{f}(\underline{x}) \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{L} &\iff f_i(x_i) \xrightarrow{x_i \rightarrow x_{i0}} L_i \forall i = 1..n \end{aligned}$$

### **Definizione 27:** Limiti finiti $\rightarrow$ infiniti

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $D$ , allora la funzione tende a  $\pm\infty$  con le seguenti condizioni:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \iff \forall k > 0 \exists \delta_k > 0 : \forall \underline{x} \in D \text{ con } 0 < | \underline{x} - \underline{x}_0 | < \delta_k \implies \begin{matrix} \underline{f}(\underline{x}) > k \\ \underline{f}(\underline{x}) < -k \end{matrix}$$

### **Definizione 28:** Limiti infiniti $\rightarrow$ finiti

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $D$  illimitato, allora la funzione tende a  $\underline{L} \in \mathbb{R}^d$  con le seguenti condizioni:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \pm\infty} f = \underline{L} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon > 0 : \forall \underline{x} \in D : \| \underline{x} \| > k_\varepsilon \implies | \underline{f}(\underline{x}) - \underline{L} | < \varepsilon$$

### Definizione 29: Limiti infiniti $\rightarrow$ infiniti

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $D$  illimitato, allora la funzione tende a  $\pm\infty$  con le seguenti condizioni:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \pm\infty} f = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \iff \forall k > 0 \exists M_k > 0 : \forall \underline{x} \in D : \|\underline{x}\| > M_k \implies \begin{matrix} f(\underline{x}) > k \\ f(\underline{x}) < -k \end{matrix}$$

Adesso vediamo esempi di risoluzione di alcuni limiti:

### Esempio 12

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{4/3}y(1+x)}{x^2+y^2} = ?$$

Questo limite va risolto con il teorema del confronto. Prima di tutto fissiamo entrambi gli assi e vediamo quanto fanno i rispettivi limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi siccome i limiti non sono diversi, non abbiamo modo di credere che necessariamente la funzione abbia comportamenti diversi in base a dove la si approci. Ora operando con i moduli costruiamo una catena di disuguaglianze (notando che al denominatore abbiamo  $x^2 + y^2$ ):

$$\begin{aligned} |x| = \sqrt{x^2} &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ |y| = \sqrt{y^2} &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \implies 0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^{4/3}y(1+x)}{x^2+y^2} \right| \end{aligned}$$

Ma

$$\frac{|x^{4/3}| \cdot |y| \cdot |1+x|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{2/3 \cdot 1/6} (x^2+y^2)^{1/2} \cdot |1+x|}{\cancel{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{1/6} \cdot |1+x|$$

E facendo il limite di questa quantità otteniamo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{1/6} \cdot |1+x| = 0$$

Quindi per il teorema del confronto

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \underbrace{(x^2+y^2)}_{\rightarrow 0} \cdot |1+x| \implies \boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0}$$

*Osservazione:* Facciamo sempre i limiti verso  $(0, 0)$  semplicemente perchè se ho un  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)}$  basta fare il cambio di variabile e porre  $x' = x - x_0$  e  $y' = y - y_0$ .

 **Esempio 13:** Limite in coordinate polari

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y| + 2x^3}{(x^2 + y^2)^{1/3}} = ?$$

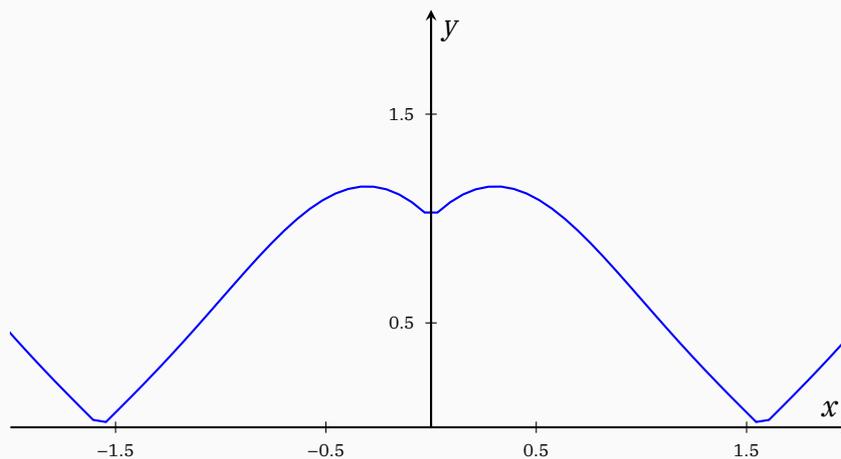
Per fare questo limite, riscriviamo in coordinate polari quelle cartesiane con parametri  $\rho, \theta$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos(\theta) \cdot |\rho \sin(\theta)| + 2\rho^3 \cos^3(\theta)}{(\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta))^{1/3}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\rho^{2/3}}$$

Mettendo in evidenza  $\rho$  e la funzione sotto modulo riesco a ricondurmi alla *semplice* disuguaglianza:

$$0 \leq \rho^{4/3} |\cos(\theta) \cdot |\sin(\theta)| + 2\rho \cos^3(\theta)|$$

Siamo arrivati a una situazione comoda, però a destra devo maggiore per qualcosa che non dipenda da  $\theta$  o le coordinate polari non saranno servite a niente avendo ancora due parametri. Basta accorgersi che la funzione  $f(\theta) = |\cos(\theta) \cdot |\sin(\theta)| + 2\rho \cos^3(\theta)|$  è limitata per qualsiasi valore finito di  $\rho$  (mettendo in evidenza il coseno abbiamo due funzioni trigonometriche che oscillano tra -1 e 1, e quindi la cui somma e prodotto fa 1) infatti il grafico di quest'ultima è:



In particolare:

$$\left| \underbrace{\cos(\theta)}_{\leq 1} \cdot \left( \underbrace{|\sin^2(\theta)|}_{\leq 1} + \underbrace{2\rho \cos^2(\theta)}_{\leq 2\rho} \right) \right| \Rightarrow f(\theta) \leq |1 + 2\rho|$$

Da qui il limite è semplicissimo:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{4/3} \cdot |1 + 2\rho| = 0$$

 Esempio 13 continued

E come prima, siccome

$$0 \leq \frac{x|y| + 2x^3}{(x^2 + y^2)^{1/3}} \leq \underbrace{\rho^{4/3}|1 + 2\rho|}_{\rightarrow 0} \implies \boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y| + 2x^3}{(x^2 + y^2)^{1/3}} = 0}$$

## 2.3.1 Continuità

 **Definizione 30:** Funzioni continue

Sia  $f : \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\underline{x}_0 \in D$  punto di accumulazione per  $D$ , allora  $f$  è continua nel punto  $\underline{x}_0$  se  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ .

In generale una funzione  $f$  è continua in tutto il suo dominio  $D$  se lo è in  $\underline{x}_0, \forall \underline{x}_0 \in D$ .

*Osservazione:* quasi scontato far notare che una funzione per essere continua in un punto, lo deve essere in ogni componente. Inoltre, sono continue somme, prodotti e composizioni di funzioni continue. Per esempio la funzione  $f(x, y, z) = \log(x^2 + 1) \cdot y \cdot \sin(xye^{-z})$  è sicuramente continua.

 **Esempio 14:** Studio della Continuità

Studiamo la continuità della funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1 + |y|)}{(x^2 + y^2)^{5/6}} + 2 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ 2 & \text{in } (0, 0) \end{cases}$$

Studiare la continuità di questa funzione significa assicurarsi che esista il limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  e che sia proprio 2, siccome la funzione nel resto del dominio è continua in quanto composizione di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai. Per semplicità ci basta verificare che  $\frac{x \log(1 + |y|)}{(x^2 + y^2)^{5/6}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ , quindi facciamo il limite con il teorema del confronto. Come spesso succede per questi limiti, poniamo il modulo della funzione maggiore di 0:

$$0 \leq \left| \frac{x \log(1 + |y|)}{(x^2 + y^2)^{5/6}} \right| = \frac{|x| \cdot \log(1 + |y|)}{(x^2 + y^2)^{5/6}}$$

A questo punto moltiplichiamo per  $\frac{|y|}{|y|}$  così che a destra abbiamo il limite notevole

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + |y|)}{|y|} = 1$$

📄 Esempio 14 continued

Invece a sinistra abbiamo un altro limite che dobbiamo risolvere a parte, ma simile a quelli fatti fin ora:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^{5/6}} \cdot \underbrace{\frac{\log(1 + |y|)}{|y|}}_{\rightarrow 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^{5/6}}$$

Per questo limite maggioriamo i moduli delle variabili alla radice della somma di tutte

le variabili, ovvero  $|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  e quindi

$$\frac{|x| \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^{5/6}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{5/6}} = (x^2 + y^2)^{1/6}$$

Questo è un limite che abbiamo già incontrato e che possiamo fare in modo immediato il più delle volte, ma se vogliamo fare tutti i passaggi facciamo un cambio in coordinate polari e non essendoci dipendenza da  $\theta$  abbiamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/6} = 0$$

E quindi per il teorema del confronto:

$$0 \leq \left| \frac{x \log(1 + |y|)}{(x^2 + y^2)^{5/6}} \right| \leq \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{5/6}}}_{\rightarrow 0} \implies \boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0}$$

E quindi abbiamo provato che la funzione è continua.

# 3

# Differenziabilità



## Sommario

- 3.1 Derivate Parziali e Direzionali, 35
- 3.2 Derivabilità, 36
- 3.3 Piano Tangente, 42
- 3.4 Jacobiana, derivate successive e Heissiana, 47
- 3.5 Funzioni composte, 49
- 3.6 Insiemi connessi e teorema dei valori intermedi, 51
- 3.7 Teorema di Lagrange e Taylor, 54
- 3.8 Massimi e minimi, 59

## 3.1 Derivate Parziali e Direzionali

Nel calcolo multivariabile non esiste un'unica derivata che valuta la crescita della funzione, perchè in base alle infinite direzioni che si possono prendere a partire da un punto, la crescita può variare. Usiamo quindi come strumento la **Derivata Parziale** che valuta la crescita della funzione in un punto sulla base di una direzione degli assi.

### Definizione 31: Derivate Parziali

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $A$  aperto e  $\underline{x}_0 = (x_{0_1} \dots x_{0_n}) \in A$ , definiamo **Derivata parziale** della funzione  $f$  calcolata nel punto  $\underline{x}_0$  rispetto all'asse  $x_i$  il seguente oggetto:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\underline{x}_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{0_1}, \dots, x_{0_i} + h, \dots, x_{0_n}) - f(x_{0_1}, \dots, x_{0_n})}{h} \quad (3.1)$$

Ovviamente in due dimensioni, per una funzione  $f(x, y)$  con  $P = (x_0, y_0)$  le due derivate parziali sono:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

### Definizione 32: Derivata Direzionale

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $A$  aperto,  $\underline{x}_0 = (x_{0_1} \dots x_{0_n}) \in A$  e  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{v}\| = 1$  (ovvero un vettore qualsiasi), allora  $f$  è dotata di **Derivata direzionale** in direzione  $\underline{v}$  e nel punto  $\underline{x}_0$  se  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0)}{t}$ , ovvero:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right|_{\underline{x}_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{0_1} + tv_1, \dots, x_{0_n} + tv_n) - f(x_{0_1}, \dots, x_{0_n})}{t} \quad (3.2)$$

*Osservazione:* se il vettore è un vettore della base canonica, ovvero se  $\underline{v} = e_i = (0 \dots \underset{i}{1} \dots 0)$

allora  $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

## 3.2 Derivabilità

Nel calcolo multivariabile Derivabilità  $\neq$  Differenziabilità, diversamente da quanto succedeva nel calcolo in una variabile. Vediamo, dopo un po' di definizioni ed esempi, come e perchè si arriva a questa conclusione.

### Definizione 33: Derivabilità

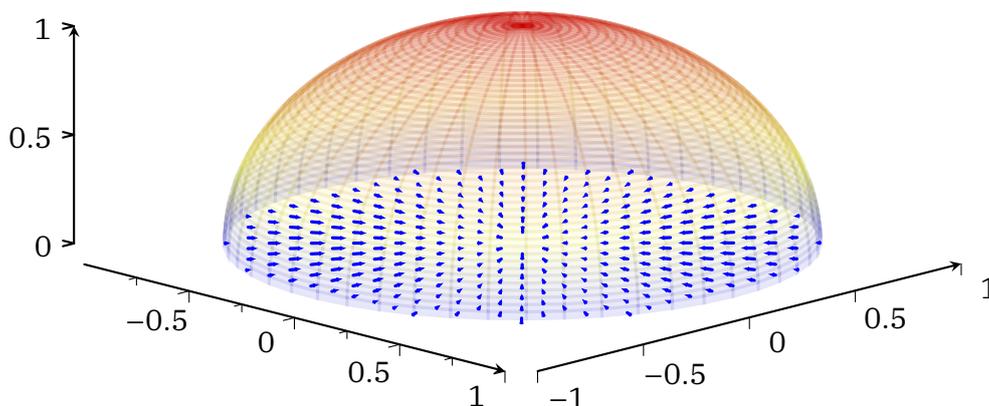
Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , essa è **Derivabile** in  $\underline{x}_0$  se  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}_0} \forall i = 1 \dots n$  ed è derivabile in tutto  $A$  se è derivabile in  $\underline{x}_0 \forall \underline{x}_0 \in A$ .

### Definizione 34: Gradiente

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , allora definiamo come suo **Gradiente** il vettore contenente tutte le derivate parziali (è importante ricordarsi che è un vettore *riga*):

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (3.3)$$

L'interpretazione geometrica del gradiente è relativamente semplice: così come la derivata in due dimensioni indica la crescita della funzione (cioè *dove* cresce), così il gradiente, che è un vettore, indica la direzione della massima crescita della funzione in base al punto in cui lo si calcola. L'esempio più facile da visualizzare è forse quello della semisfera, come in figura sotto, di formula generica  $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , di cui se grafichiamo sotto la funzione stessa il campo del gradiente (banalmente grafichiamo i vettori gradiente per i punti del dominio) vediamo come tutti vadano in direzione del centro della sfera, ovvero dov'è il massimo della funzione.



Sempre con questa interpretazione sotto mano, notiamo come la formula per la derivata direzionale di una funzione diventa (se esiste il gradiente in  $x_0$ ):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right|_{x_0} = \underline{v} \cdot \nabla f(x_0) \quad (3.4)$$

E questo perchè sta a indicare il valore del gradiente lungo quella direzione specifica (ovvero quanto cresce la funzione lungo quella direzione, che è il compito del gradiente e della derivata parziale in generale).

 **Definizione 35:** Classe di funzione

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , allora la definiamo di classe  $C^i$  secondo la definizione:

$$C^i(A) := \left\{ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f^i \text{ continua} \right\} \quad (3.5)$$

Ovvero se una funzione possiede la  $i$ -esima derivata continua.

*Osservazione:* le composizioni di funzioni di una classe  $i$  sono anch'esse di quella classe.

### ⊗ Attenzione 1

Nel calcolo multivariabile, siccome l'esistenza delle derivate parziali, direzionali, la differenziabilità... non sono cose scontate e che si implicano a vicenda, è facile fare confusione su cosa implica cosa. Facciamo allora un paio di esempi a delle proposizioni che ci aiutano a capire i vari legami tra queste proprietà delle funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , per poi completare tutto con uno schema.

### π Proposizione 3

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , allora

$$f \text{ Derivabile} \not\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v_i} \forall i = 1 \dots n$$

Cioè la derivabilità non implica l'esistenza di tutte le derivate parziali, siccome per la [Definizione 3.2](#) è il contrario.

### 📄 Esempio 15

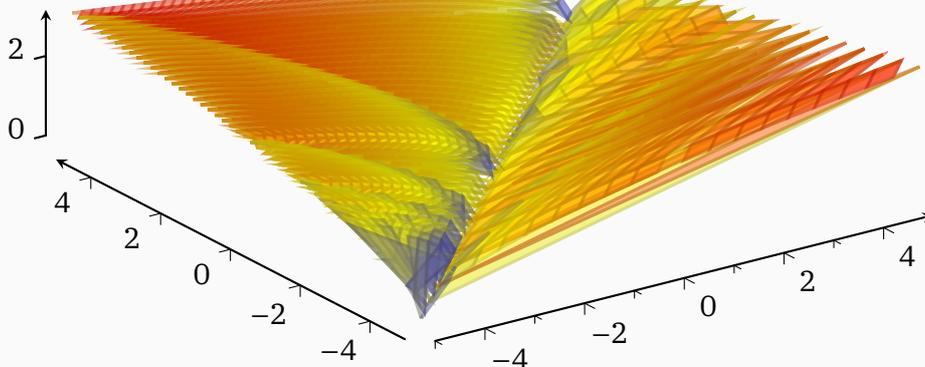
La funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

È derivabile nel punto  $(0,0)$  perchè le derivate parziali esistono, infatti il gradiente è  $\nabla f(0,0) = (0,0)$ , eppure per le derivate direzionali non basta moltiplicare il versore per il gradiente: la formula è valida se esiste il limite:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|tv_1 - tv_2|}}{t} = \\ &= \sqrt{|v_1 - v_2|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \sqrt{|v_1 - v_2|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \end{aligned}$$

E questo limite non esiste, siccome è diverso se approcciato da destra o da sinistra.



### π Proposizione 4

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , allora

$$f \text{ Continua} \not\Rightarrow f \text{ Derivabile}$$

### 📄 Esempio 16

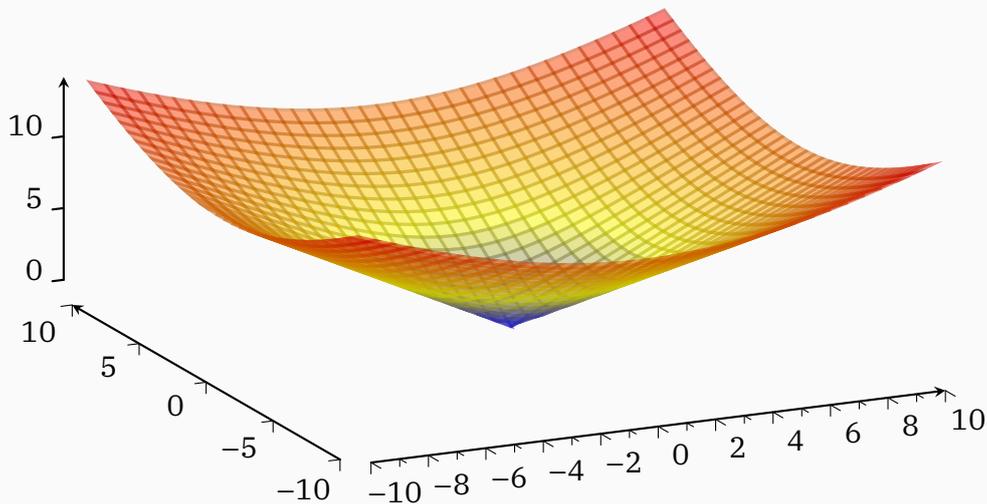
La funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

È un esempio classico di funzione continua ma non derivabile. La funzione è continua in  $(0,0)$  perchè il limite è 0, esattamente come il valore della funzione, ma se calcoliamo la derivata secondo limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Che come prima, è diverso se approssiato da destra o da sinistra.



Vediamo adesso la definizione e soprattutto il significato di differenziabilità.

### **Definizione 36:** Differenziabilità

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , essa si dice **Differenziabile** in  $x_0$  se vale la seguente condizione:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - [\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)]}{\|x - x_0\|} = 0$$

### **Definizione 37:** Differenziale

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in tutto  $A$ , allora il **Differenziale** di  $f$  in  $x_0 \in A$  è

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{h} \rightarrow \nabla f(x_0) \cdot \underline{h} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_0} \cdot h_i$$

### **Teorema 4**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $x_0 \in A$ , allora  $f$  Differenziabile implica:

- $f$  continua in  $x_0$ ;
- $f$  ammette derivata direzionale per ogni versore e inoltre  $\left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_i} \right|_{x_0} = \nabla f(x_0) \cdot \underline{v}_i$

### **Dimostrazione 3**

Abbiamo due implicazioni quindi procediamo con ordine:

- Per quanto riguarda la prima, siccome  $f$  è differenziabile, significa che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - [\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)]}{\|x - x_0\|} = 0$$

Ovvero il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore e tende a 0 più velocemente, quindi sicuramente possiamo eseguire il limite soltanto sul numeratore e notare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x) - f(x_0) - [\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)]}_{\rightarrow 0} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

✓ Dimostrazione 3 continued

- Per quanto riguarda la seconda implicazione, se prendiamo  $x = x_0 + tv$  con  $\underline{v}$  versore, allora sostituendo nella definizione di differenziabilità abbiamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - [\nabla f(x_0) \cdot (x_0 + tv - x_0)]}{\|x_0 + tv - x_0\|} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - [\nabla f(x_0) \cdot tv]}{|t|} = 0$$

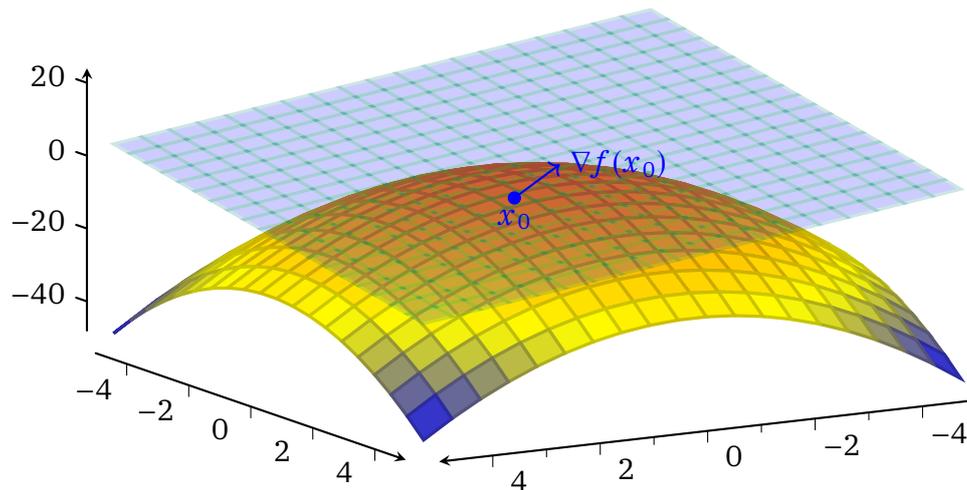
In cui abbiamo il limite per  $t \rightarrow 0$  poichè se  $x = x_0 + tv \rightarrow x_0 \implies t \rightarrow 0$  perchè  $v$  è un versore, e al denominatore solo  $t$  poichè  $\|v\| = 1$ . Siccome questo limite tende a 0 per la differenziabilità, allora facendo lo stesso discorso di prima mi ritrovo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{|t|} = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Ovvero la definizione di derivata direzionale usando il gradiente

## 3.3 Piano Tangente

Il senso geometrico della differenziabilità è simile a quello della derivabilità per le funzioni in due dimensioni ma esteso dimensionalmente. Similmente a come il significato di crescita della retta in due dimensioni si traduce in crescita indicata dal vettore gradiente in più dimensioni, allo stesso modo adesso l'esistenza di una retta che approssima la funzione nel punto locale in cui è derivabile, si estende all'esistenza di un **Piano** che approssima la funzione nel punto locale (non potendo una semplice retta approssimare la funzione).



### π Proposizione 5

Possiamo affermare che una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $x_0 \iff \exists p(\underline{x}; \underline{x}_0) = f(\underline{x}_0) + \underline{a}(\underline{x} - \underline{x}_0)$  ovvero un polinomio con  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n : \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - p(\underline{x}; \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0$ .

Possiamo altrimenti dire che la condizione è che esista l'**Iperpiano Tangente** (perché solo in tre dimensioni è un piano effettivo) che vive in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e di equazione:

$$\pi_{x_0}^{n+1} = f(\underline{x}_0) + \underline{a} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (3.6)$$

In particolare, in  $n = 1$  abbiamo che  $\pi_{x_0}^2 = f(x_0) + a(x - x_0)$ , quindi una retta, in  $n = 2$  avrò un piano similmente. Cerchiamo però di giustificare la proposizione e in questo modo ricaviamo anche il valore di  $a$ :

### ✓ Dimostrazione 4

- Per il  $\implies$  prendo  $\underline{a} = \nabla f(\underline{x}_0)$  e uso l'ipotesi per la differenziabilità, ovvero

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0$$

✓ Dimostrazione 4 continued

Che è vero appunto per la definizione di differenziabilità.

- Per il  $\Leftarrow$  devo dimostrare che  $\underline{a} = \nabla f(\underline{x}_0)$  e che l'esistenza dell'iperpiano implica la differenziabilità. Scrivo l'Equazione 3.6 con  $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{e}_j$  in cui ovviamente  $\underline{e}_j = (0 \dots \overset{j}{1} \dots 0)$  e il limite che deve valere come condizione è:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0) - \underline{a}(t\underline{e}_j)}{\|t\underline{e}_j\|} = 0 \implies \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0) - \underline{a}(t\underline{e}_j)}{\|t\underline{e}_j\|} = o(1)$$

Ovvero se il limite è 0, la quantità è un o-piccolo di 1 per  $t \rightarrow 0$ , ed è l'ipotesi di esistenza dell'iperpiano, quindi rigirando l'equazione e dividendo e sottraendo per  $t$  ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0)}{|t|} \cdot \frac{t}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\underline{a}t\underline{e}_j}{|t|} + o(1) \right) \cdot \frac{t}{t} \\ &\Downarrow \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\underline{a}t\underline{e}_j}{|t|} \cdot \frac{t}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} o(1) \end{aligned}$$

E le due quantità sono uguali anche se moltiplicate per  $\frac{|t|}{t}$ :

$$\underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0)}{t}}_{= \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x_0}} = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \underline{a}_j + \lim_{t \rightarrow 0} o(1) \cdot \frac{|t|}{t}}_{\rightarrow \underline{a}_j}$$

In cui a sinistra è chiaro che abbiamo semplificato e siamo rimasti con la definizione di derivata parziale, mentre a destra siamo rimasti con  $\underline{a} \cdot \underline{e}_j = a_j$  perchè il vettore della base canonica avendo tutti 0 e un 1 alla posizione  $j$ -esima fa sopravvivere solo quell'indice, e l'o-piccolo che era rimasto da solo viene moltiplicato anche lui per  $|t|/t$ , ma per le proprietà dell'o-piccolo questo rimane invariato, e ovviamente il limite è 0. Siamo rimasti con

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x_0} = a_j \quad \forall j = 1 \dots n$$

E questo è ovvio perchè l'indicizzazione del vettore  $\underline{e}_j$  è indifferente nel calcolo, quindi se questo è vero per ogni indice il vettore  $\underline{a}$  sarà in modo generico:

$$\boxed{\underline{a} = \nabla f(x_0)}$$

Possiamo quindi riscrivere la formula dell'iperpiano tangente con vettore che abbiamo appena dimostrato essere proprio il gradiente calcolato nel punto dell'approssimazione (il che ha perfettamente senso: per approssimare la funzione avrò bisogno del punto esatto, di tutte le derivate corrispondenti e della differenza tra  $x$  e il punto).

$$\pi_{x_0}^{n+1} = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (3.7)$$

Quindi in  $\mathbb{R}^2$  sarà:

$$\pi_{x_0}^3 = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0)$$

### $\pi$ Teorema 5: Teorema del Differenziale totale

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $x_0 \in A$ , se  $\begin{cases} f \text{ Derivabile in } A \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ Continue in } x_0 \end{cases} \implies f \text{ è Differenziabile.}$

### $\pi$ Corollario 1

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^1(A) \implies f$  è Differenziabile.

### $\checkmark$ Dimostrazione 5: Teorema del differenziale totale

Devo dimostrare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Ovvero la definizione di differenziabilità. Per farlo ipotizziamo di stare in  $\mathbb{R}^2$  per semplicità, ma non cambia nulla. Parto dal considerare la funzione lungo un asse fissato, ovvero  $f(t, y_0)$  con  $y_0$  appunto fissato e  $t \in [x_0, x]$ . In questo intervallo la funzione è continua e derivabile, per cui posso applicare il [teorema di Lagrange](#) e ottengo che

$$\begin{aligned} \exists \xi \in ]x_0, x[: \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\xi, y_0)} &= \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ \implies (x - x_0) \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\xi, y_0)} &= f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Che ci siamo riscritti portando la differenza a sinistra per un fattore di comodità che verrà più chiaro in seguito. Con lo stesso ragionamento fissiamo  $f(x, y)$  ma non chiamiamo la variabile  $x_0$  perchè non è la stessa, essa è arbitraria e deve essere diversa altrimenti la dimostrazione non viene. Prima stavamo fissando un  $y_0$  che è quella

✓ Dimostrazione 5 continued

del punto  $(x_0, y_0)$ , ora stiamo fissando un  $x$  qualsiasi non del punto, ma pur sempre fissata. Quindi usiamo Lagrange ma sull'intervallo  $[y_0, y]$  che ci assicura che:

$$(y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x, \eta)} = f(x, y) - f(x, y_0)$$

Sommando gli addendi di quello che abbiamo appena trovato a destra e a sinistra dell'uguale vediamo che:

$$(y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x, \eta)} + (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\xi, y_0)} = f(x, y) - \cancel{f(x, y_0)} + \cancel{f(x, y_0)} - f(x_0, y_0)$$

Abbiamo ottenuto (a sinistra) una quantità che possiamo usare nel limite che vogliamo dimostrare, ovvero mettiamo la quantità a sinistra al posto di  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ . Teniamo comunque a mente che Lagrange ci ha assicurato l'esistenza dei due numeri

$$x_0 \leq \xi \leq x, \quad y_0 \leq \eta \leq y$$

Quindi quando faremo il limite per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  avremo rispettivamente  $\xi \rightarrow x_0, \eta \rightarrow y_0$ . Facciamo quindi il limite con sostituendo la quantità:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{(y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x, \eta)} + (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\xi, y_0)} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Raccogliendo le differenze, scrivendo le derivate parziali come  $f_x, f_y$  perchè sennò diventiamo scemi e ponendo tutto sotto modulo arriviamo a:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \left| \frac{(x - x_0) \cdot \left[ f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right] + (y - y_0) \cdot \left[ f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right|$$

E utilizzando la [disuguaglianza triangolare](#) sulla quantità di cui facciamo il limite:

$$\left| \frac{(x - x_0) \cdot \left[ f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right] + (y - y_0) \cdot \left[ f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq$$

$$\left| \frac{(x - x_0) \cdot \left[ f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| + \left| \frac{(y - y_0) \cdot \left[ f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| =$$

✓ Dimostrazione 5 continued

Riscriviamo la quantità separata perchè ci interessa dimostrare che

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1$$

$$\frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1$$

Questo in realtà è abbastanza immediato: sicuramente  $(x - x_0)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  perchè al più aggiungo una quantità, e siccome la radice è una funzione crescente  $\sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Quindi abbiamo una quantità divisa per qualcosa

$\stackrel{=|x-x_0|}{\leq}$

che è sicuramente più grande, rendendo entrambe le frazioni  $\leq 1$ . Adesso allora minoriamo ancora togliendo le quantità appena discusse:

$$\left| \frac{(x - x_0) \cdot [f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| + \left| \frac{(y - y_0) \cdot [f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq$$

$$|f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)|$$

E da qui abbiamo praticamente concluso. Basta osservare che

$$\begin{cases} \xi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0 \\ \eta \xrightarrow{y \rightarrow y_0} y_0 \end{cases}$$

E questo perchè l'intervallo in cui era definita la variabile  $\xi$  era  $]x_0, x[$  e lo stesso per  $\eta$ . Allo stesso modo ricordiamoci che in generale  $x$  sta tendendo a  $x_0$ , quindi  $f_y(x, \eta) \rightarrow f_y(x_0, y_0)$ . Se questo è vero, allora il modulo a cui abbiamo minorato tutto quanto tende a 0, siccome:

$$\underbrace{|f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)|}_{\rightarrow f_x(x_0, y_0)} + \underbrace{|f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)|}_{\rightarrow f_y(x_0, y_0)} \rightarrow 0$$

Abbiamo costruito una catena di disuguaglianze che ci permette di usare il teorema del confronto, siccome

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \underbrace{|f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)|}_{\rightarrow 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0}$$

## 3.4 Jacobiana, derivate successive e Heissiana

### **Definizione 38:** Jacobiana

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , non posso più definire il vettore gradiente perchè le derivate sono molteplici. Definisco allora una **Matrice Jacobiana** definita come tale:

$$Jf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\underline{x}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{\underline{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_d}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_d}{\partial x_n} \right|_{\underline{x}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Che possiamo intendere quindi come un gradiente vettore colonna i cui indici sono i gradienti vettori riga delle singole  $f_i$ , ovvero

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_d(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

*Osservazione:* Per le funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  valgono le stesse proprietà di quelle  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con la differenza che ogni  $f_i$  deve possedere la proprietà. Per esempio, una  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  è derivabile/differenziabile in  $\underline{x}_0$  solo se  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lo è in  $\underline{x}_0 \forall i = 1 \dots d$ . È chiaro inoltre che la Jacobiana esiste se la funzione è derivabile, quindi se  $f_i$  sono derivabili e quindi se esistono i  $d$  gradienti relativi.

### **Definizione 39**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , essa è di classe 1, ovvero  $f \in C^1(A)$  se:

- $f$  è derivabile in  $A$  ovvero  $\exists Jf$  per tutto  $A$ ;
- $Jf$  è continua in tutto  $A$ .

### Definizione 40: Derivata Parziale seconda

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e  $f$  derivabile in  $A$ , allora esiste in gradiente

$\nabla f(\underline{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \right)$  in cui ogni derivata parziale è una funzione del tipo

$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \forall i = 1 \dots n$  perchè prende un vettore come input e da un valore come output (il coefficiente della retta in quella direzione). Di conseguenza, se questa funzione è derivabile ne posso definire la derivata, ovvero in modo generale:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\underline{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\underline{x}} \quad (3.9)$$

### Definizione 41: Heissiana

Se esistono tutte le derivate parziali seconde di una funzione, posso definire la sua **Matrice Heissiana** o semplicemente Heissiano, ovvero:

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} \Big|_{\underline{x}} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\underline{x}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_i} \Big|_{\underline{x}} & \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \Big|_{\underline{x}} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} \Big|_{\underline{x}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \Big|_{\underline{x}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Può sorgere come domanda se l'ordine di derivazione importi, o da cosa derivi quest'ordine. Per convenzione si pone come primo differenziale quello della variabile che è stata derivata per prima. Non possiamo inoltre affermare che due derivate parziali con ordine diverso siano uguali, a meno di determinate condizioni.

### Teorema 6: Teorema di Schwarz

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f \in C^2(A)$ , allora le derivate parziali seconde miste sono uguali tra loro, ovvero:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\underline{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{\underline{x}} \quad \forall \underline{x} \in A, \forall i, j = 1 \dots n$$

Il che vuole anche dire che la Heissiana è una matrice simmetrica.

## 3.5 Funzioni composte

Il concetto di funzioni composte in più variabili è uguale a quello in una, ma ci sono delle complicanze significative in alcuni calcoli, come quelli della Jacobiana.

### $\pi$ Teorema 7: Teorema di Derivazione delle funzioni composte

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $g : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $A, B$  aperti e  $f, g$  entrambe differenziabili, allora la funzione composta  $h$  definita di seguito è differenziabile.

$$h(\underline{x}) = g\left(f(\underline{x})\right)$$

$$h := g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Vale ovviamente il Jacobiano, che è una moltiplicazione matrice×matrice:

$$Jh(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_d}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial h_d}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \Big|_{(f(\underline{x}))} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \Big|_{(f(\underline{x}))} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k} \Big|_{(f(\underline{x}))} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial y_1} \Big|_{(f(\underline{x}))} & \frac{\partial g_d}{\partial y_2} \Big|_{(f(\underline{x}))} & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial y_n} \Big|_{(f(\underline{x}))} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \end{pmatrix}$$

Quindi sotto forma di combinazione lineare ogni elemento della matrice jacobiana è:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} = \nabla g_i \left( f(\underline{x}) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \Big|_{\underline{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \Big|_{\underline{x}} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial y_l} \Big|_{(f(\underline{x}))} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} \quad \forall \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots d \end{matrix}, \underline{x} \in A$$

In cui precisiamo come  $y$  sia la variabile di  $g$  per evitare confusione (le variabili delle due funzioni non sono le stesse!).

**π Corollario 2**

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $g : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $A, B$  aperti, se  $f \in C^1(A), g \in C^1(B) \implies h \in C^1(A)$

**✓ Dimostrazione 6**

La dimostrazione è abbastanza basilare. Per il teorema delle funzioni composte  $h$  è differenziabile e abbiamo già mostrato che

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial y_l} \Big|_{(f(\underline{x}))} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}}$$

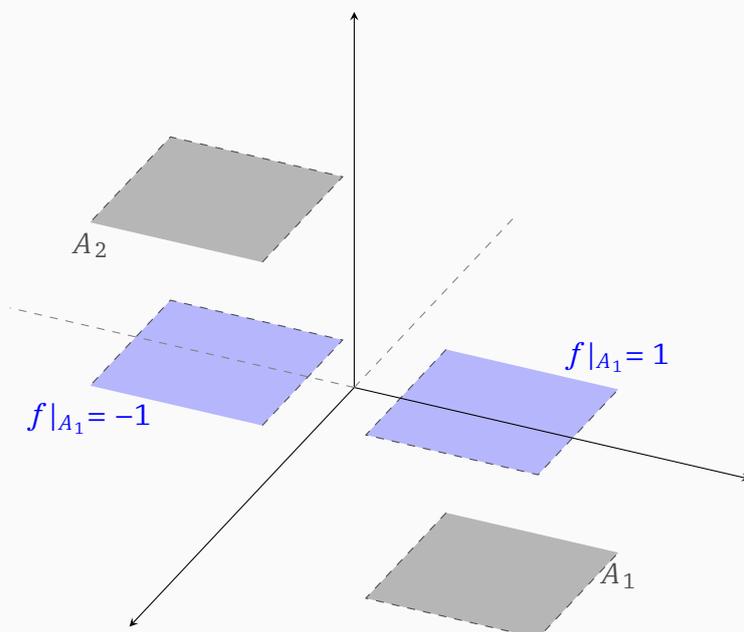
Ma questi elementi sono tutti continui perchè prodotti di funzioni continue, quindi valgono le ipotesi di classe prima per la funzione  $h$ .

## 3.6 Insiemi connessi e teorema dei valori intermedi

Presi una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, differenziabile nel dominio e tale che  $\nabla f(\underline{x}) \equiv 0$  in  $A$ , si può dire che  $f$  è costante? Come suggerisce Riccardo in aula, se la domanda all'apparenza scontata viene posta, la risposta è quasi certamente no. Vediamo un esempio.

### Esempio 17

Basta prendere una funzione definita a tratti, con  $A = A_1 \cup A_2$  che è ovviamente aperto, e in cui  $f$  è differenziabile e il gradiente è nullo perché, prese le singole restrizioni la funzione è costante, ma di per sé non lo è, non si può dire che  $f(\underline{x}) = k \in \mathbb{R} \forall \underline{x} \in A$ .



Per ovviare a questa cosa basta definire un insieme connesso.

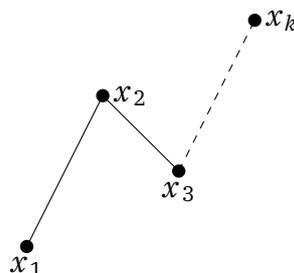
### Definizione 42: Segmento

Siano  $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n : \underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ , allora il **Segmento di vertici**  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  è definito come

$$[\underline{x}_1, \underline{x}_2] = \left\{ \underline{x}_1 + t(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) \mid t \in [0; 1] \right\}$$

### Definizione 43: Poligonale

Dati  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  con  $\underline{x}_i \neq \underline{x}_j \forall i \neq j = 1 \dots k$ , allora la **Poligonale** di vertici  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  è l'unione dei vari segmenti  $[\underline{x}_i; \underline{x}_{i+1}]$ ,  $i = 1 \dots k - 1$  e i vettori  $\underline{x}_1, \underline{x}_k$  sono gli estremi della poligonale.

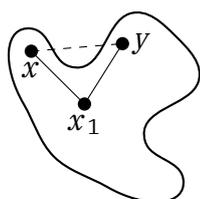


### Definizione 44: Insieme connesso per poligonali

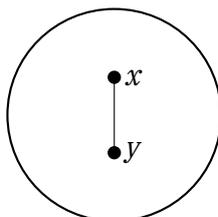
Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **Connesso per poligonali** se per ogni coppia di punti  $\underline{x}, \underline{y} \in A : \underline{x} \neq \underline{y}$ , esiste una poligonale completamente contenuta in  $A$  e di estremi  $\underline{x}, \underline{y}$ .

### Proposizione 6: Insieme connesso

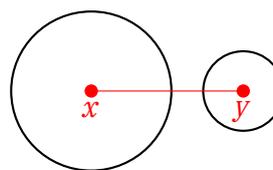
Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è **Connesso**  $\iff$  è connesso per poligonali.



Connesso



Connesso



Non Connesso

### π Teorema 8

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, con  $A$  aperto e connesso e  $\nabla f \equiv 0$  in  $A$ , allora  $f = k \in \mathbb{R} \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ .

### ✓ Dimostrazione 7

Siano  $\underline{x}, \underline{y} \in A : \underline{x} \neq \underline{y}$ . Per ipotesi  $A$  aperto quindi anche per poligonali da **Proposizione 3.6**, e quindi esiste una poligonale tutta contenuta in  $A$  di estremi  $\underline{x}, \underline{y}$ . Prendo singolarmente  $\underline{x}_i$  e  $\underline{x}_{i+1}$ , e definisco la curva  $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$  dove  $\varphi(t) = \underline{x}_i + t(\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i)$ . Sia poi

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = f(\varphi(t)) \implies h'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0 \cdot (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i) = 0$$

In particolare quest'ultima derivata fa 0 perchè  $\nabla f \equiv 0$  per ipotesi. Abbiamo inoltre usato il teorema delle funzioni composte per la derivata siccome  $\varphi \in C^1, f$  Differenziabile per ipotesi, e quindi  $h(1) = h(0)$  per il teorema di Lagrange, siccome  $h(1) - h(0) = h'(\eta) \cdot (1 - 0) = 0$  per quanto detto sopra. Però sappiamo anche che  $h(1) = h(\varphi(1)) = f(\underline{x}_{i+1})$  e allo stesso modo  $h(0) = f(\underline{x}_i)$  quindi  $f(\underline{x}_{i+1}) = f(\underline{x}_i)$  ma questo vale  $\forall i = 1 \dots k - 1$  e quindi in particolare vale per gli estremi del segmento, ovvero  $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$  e anche questo non dipende dalla scelta dei punti, vale per ogni coppia di punti in  $A$ , quindi concludiamo che

$f$  è costante

### π Teorema 9: Teorema dei valori intermedi

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e  $f$  continua. Siano poi  $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} : a < b \\ \underline{x}, \underline{y} \in A \end{cases} : f(\underline{x}) = a, f(\underline{y}) = b$ , allora vale la seguente condizione:

$$\exists c \in ]a; b[, \exists \underline{z} \in A : f(\underline{z}) = c$$

## 3.7 Teorema di Lagrange e Taylor

### $\pi$ Teorema 10: Teorema di Lagrange

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f$  differenziabile in  $A$ . Siano poi  $\underline{x}_0, \underline{x} \in A : [\underline{x}_0, \underline{x}] \subseteq A$ , allora vale la seguente condizione:

$$\exists \underline{\xi} \in [\underline{x}_0, \underline{x}] : f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{\xi}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

### ✓ Dimostrazione 8

Uso la funzione ausiliaria  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\underline{x}_0, \underline{x}]$  con  $\varphi(t) = \underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0)$ , ricordando che  $\varphi'(t) = \underline{x} - \underline{x}_0$ . Considero poi un'ulteriore funzione ausiliaria  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $h(t) = f(\varphi(t))$ , quindi una funzione composta. Per il Teorema 3.5  $h$  è differenziabile e in particolare la sua derivata vale

$$h'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

Ora siccome  $h(t)$  è una funzione con variabile unidimensionale, posso applicare il teorema di Lagrange in una dimensione e affermare che

$$\exists \eta \in ]0, 1[ : h(1) = h(0) + h'(\eta)(1 - 0)$$

Da qui osservo come  $h(1) = f(\varphi(1)) = f(\underline{x})$  e allo stesso modo  $h(0) = f(\underline{x}_0)$ , quindi sia  $\underline{\xi} \in [\underline{x}_0, \underline{x}]$  tale che  $\underline{\xi} = \varphi(\eta)$ , allora considerando che  $h'(\eta) = \nabla f(\underline{\xi}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$ , la relazione di prima su  $h(1)$  diventa:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{\xi}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

### $\equiv$ Definizione 45: Formula di Taylor

Data una  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f$  chiaramente differenziabile in  $A$ , la formula di approssimazione di Taylor al primo ordine è:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (3.11)$$

Allo stesso modo possiamo definire la formula con il resto di peano, che è:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \quad (3.12)$$

Possiamo poi andare avanti e definire la formula di Taylor al secondo ordine, che utilizza la Heissiana, ovvero:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2} \left[ Hf(\underline{\xi}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) \right] (\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (3.13)$$

In cui  $\underline{\xi} \in [\underline{x}, \underline{x}_0]$  e l'Heissiana viene prima moltiplicata con un prodotto matrice vettore che produce un vettore bidimensionale, e poi questi vettori vengono moltiplicati tra loro, però per brevità possiamo scrivere semplicemente  $Hf(\underline{\xi})(\underline{x} - \underline{x}_0)^2$ .

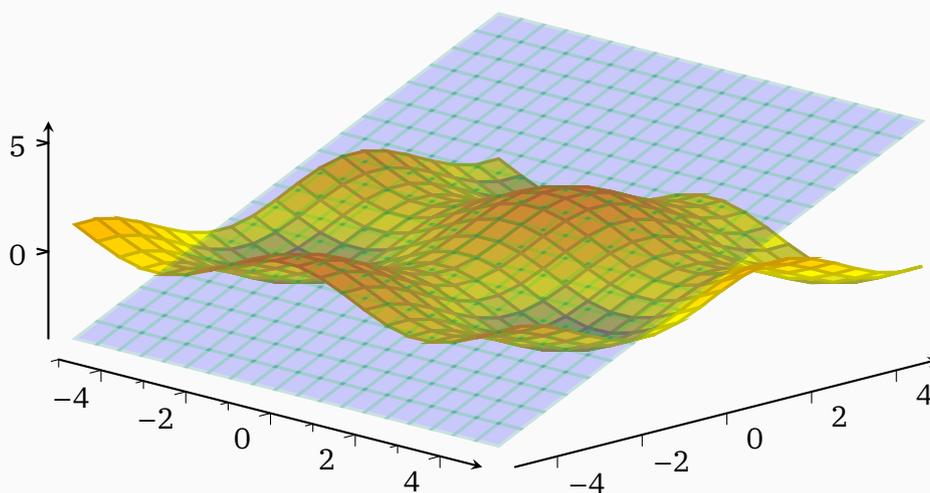
Chiaramente lo sviluppo di Taylor al primo ordine rappresenta semplicemente l'approssimazione di una funzione in due variabili con un piano, quello al secondo rappresenterà l'approssimazione tramite un paraboloide di dimensioni e forma variabile, così come la parabola per le funzioni in una dimensione.

### Esempio 18

Cerchiamo di approssimare la funzione  $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$ . Come prima cosa calcoliamoci gradiente e Heissiana, fondamentali per la formula di Taylor:

$$\nabla f = (-\sin(x), \cos(x)) \quad Hf = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & \sin(x) \end{pmatrix}$$

A questo punto ci calcoliamo prima lo sviluppo al primo ordine, che è  $f(0, 0) = f(0, 0) + \nabla f(\underline{x} - \underline{x}_0) = 1 - \sin(0)(x - 0) + \cos(0)(y - 0) = 1 + y$ , e grafichiamo cosa abbiamo trovato:



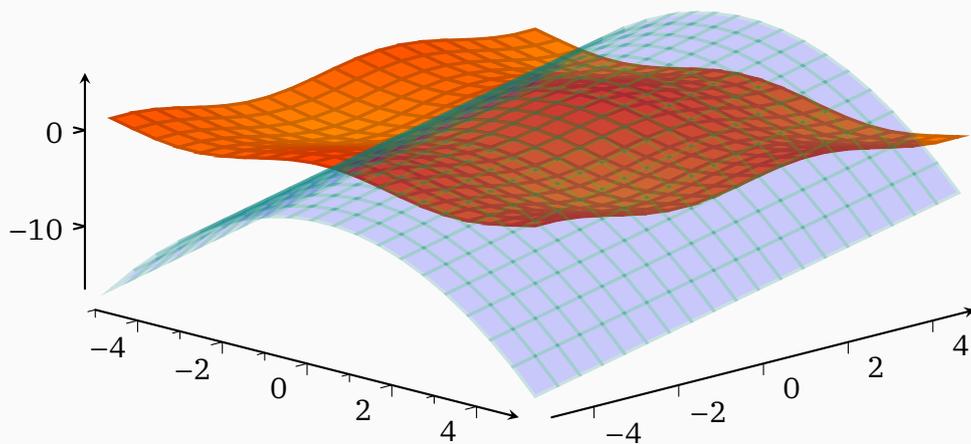
## Esempio 18 continued

A questo punto andiamo avanti con l'approssimazione, e troviamo che

$$f(0,0) = 1 + y + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(0) & 0 \\ 0 & \sin(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \quad (3.14)$$

$$= y + 1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 + y + 1 \quad (3.15)$$

Se ora grafichiamo quanto trovato, questo è un pseudo paraboloido che approssima meglio del piano la nostra funzione nel punto indicato



## Generalizzazione della formula di Taylor (Extra)

Volendo potremmo generalizzare la formula di Taylor per una funzione di  $n$  variabili all'ordine che vogliamo, non solo al primo o al secondo come abbiamo fatto fin ora. Questa cosa, che può sembrare semplice, crea un problema di fondo: come generalizziamo il concetto di  $\nabla^k f$ ? Ovvero se il gradiente comprende tutte le derivate prime e l'Heissiana tutte le seconde, esiste un qualcosa che racchiude quelle terze, quarte...? La risposta è ni, nel senso che se passiamo da vettore a matrice, non c'è uno step dopo, un oggetto matematico adatto a rappresentare le derivate  $k$ -esime (almeno non di interesse in questo corso), ma possiamo ricordarci che i vettori sono rappresentabili come sommatorie e le matrici come doppie sommatorie, ovvero:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\underline{x}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\underline{x}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}}$$

$$Hf = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x}}$$

In realtà sarebbe più complicato di così, perchè dovremmo moltiplicare il vettore riga delle derivate parziali con un vettore colonna fatto di componenti  $a_i$  in modo da rendere il gradiente una funzione, e lo stesso per l'Heissiana, ma la verità è che noi questa cosa non la dovremmo neanche fare e quindi ci accontentiamo.

Seguendo questo ragionamento possiamo definire la derivata  $k$ -esima come:

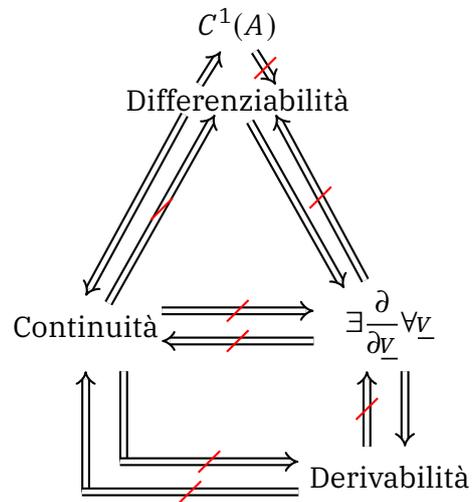
$$\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \Big|_{\underline{x}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \Big|_{\underline{x}}$$

Da qui la generalizzazione della formula di Taylor è *banale*, e la formula è

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \Big|_{\underline{x}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \Big|_{\underline{x}} \right) (\underline{x} - \underline{x}_0)^k \quad (3.16)$$

## Schema sulla Differenziabilità

Possiamo riassumere quanto affermato fin ora con un *piccolo* schema su continuità, derivabilità, differenziabilità...



## 3.8 Massimi e minimi

Similmente alle funzioni in una variabile, possiamo ricercare punti di massimi, minimi e altro nelle funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ma prima dobbiamo introdurre delle definizioni. Sia quindi generalmente  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

 **Definizione 46:** Massimo/Minimo relativo

Sia  $\underline{x}_0 \in A$ , questo è di **Massimo/Minimo** relativo (di  $f$  in  $A$ ) se:

$$\exists \delta : f(\underline{x}_0) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in (B_\delta(\underline{x}_0) \cap A)$$

Essi sono inoltre massimi/minimi **Stretti** se la disuguaglianza è stretta. Sono poi **Assoluti** se la disuguaglianza vale in tutto  $A$  e non solo in una certa palla, e sono assoluti e stretti se si verificano entrambe le condizioni.

 **Definizione 47:** Punto estremante

Sia  $\underline{x}_0 \in A$  un punto di massimo/minimo, questo è **Estremante** di  $f$  in  $A$ .

 **Definizione 48:** Punto relativo

Sia  $\underline{x}_0 \in A$ , questo è **Relativo** di  $f$  in  $A$  se

$$\nabla f(\underline{x}_0) = 0$$

**π Teorema 11:** Teorema di Fermat

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $\underline{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$  con  $\underline{x}_0$  punto di massimo/minimo relativo  
 $\implies \nabla f(\underline{x}_0) = 0$ .

**✓ Dimostrazione 9**

Se  $f$  è derivabile in  $\underline{x}_0 \implies$  fissato un  $i \in \{1 \dots n\}$ , esiste il limite dell' $i$ -esimo rapporto incrementale. Siccome  $\underline{x}_0$  è punto di massimo, ogni altro punto sarà tale che la funzione calcolata lì è minore, ovvero  $f(\underline{x}_0 + t) - f(\underline{x}_0) \leq 0$ , che tradotto vettorialmente è:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f(\underline{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\underline{x}_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \leq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{f(\underline{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\underline{x}_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \geq 0$$

Ma esistendo il limite questi sono uguali, ed essendo sia  $\leq$  che  $\geq 0$ , allora concludiamo che

$$\boxed{\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\underline{x}_0} = 0}$$

### 3.8.1 Ripasso di Algebra Lineare

Costretti a usare l'algebra lineare per lo studio delle funzioni in due variabili, vediamo alcune proprietà delle matrici che ci interessano.

#### $\pi$ Teorema 12

Sia  $H \in M_{n,n}$  matrice simmetrica  $\implies$  ammette  $n$  autovalori reali  $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$  e inoltre è diagonalizzabile in  $\mathbb{R}$ .

Vediamo poi un paio di definizioni utili.

#### $\equiv$ Definizione 49

Sia  $H \in M_{n,n}$  matrice simmetrica, essa è detta:

- **Definita Positiva/Negativa** se  $H\underline{v} \cdot \underline{v} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix} \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \iff \lambda_i \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix} \forall i = 1 \dots n$ ;
- **Semidefinita Positiva/Negativa** se  $H\underline{v} \cdot \underline{v} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \iff \lambda_i \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \forall i = 1 \dots n$ ;
- **Indefinita** se  $\exists \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} H\underline{v} \cdot \underline{v} > 0 \\ H\underline{w} \cdot \underline{w} < 0 \end{matrix} \iff \exists i, j \in \{1 \dots n\} : \lambda_i \cdot \lambda_j < 0$

#### $\pi$ Lemma 3

Sia  $H \in M_{n,n}$  matrice simmetrica  $\implies \lambda_{\min} \|\underline{v}\|^2 \leq H\underline{v} \cdot \underline{v} \leq \lambda_{\max} \|\underline{v}\|^2$ , vale  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ .

#### $\pi$ Proposizione 7

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \in C^2(A)$  con  $\underline{x}_0 \in A$  punto critico,  $A$  aperto, allora:

- Se  $\underline{x}_0$  è punto di minimo/massimo locale  $\implies Hf(\underline{x}_0)$  è semidefinita negativa/positiva;
- Se  $Hf(\underline{x}_0)$  è definita negativa/positiva  $\implies \underline{x}_0$  è punto di massimo/minimo locale

#### $\checkmark$ Dimostrazione 10: Punto di massimo

Dimostriamo entrambe le proposizioni per ordine:

- Voglio dimostrare che  $Hf(\underline{x}_0)\underline{v} \cdot \underline{v} \leq 0$ , per farlo fisso  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  e considero che (siccome  $\underline{x}_0$  è punto di massimo) avrò che ogni altro punto è minore, e se gli

✓ Dimostrazione 10 continued

sottraggo la funzione nel massimo la quantità è negativa, ovvero

$$f(\underline{x}_0) \geq f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \implies 0 \geq f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)$$

Siccome  $t \simeq 0$ , vuole dire che  $t\underline{v}$  è un incremento infinitesimale del punto, ovvero  $\underline{x} - \underline{x}_0$ , quindi  $f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = f(\cancel{\underline{x}_0} + \underline{x} - \cancel{\underline{x}_0}) = f(\underline{x})$ . A questo punto usiamo Taylor e approssimiamo la funzione centrata nel punto  $f(\underline{x}_0)$ , otteniamo:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \cancel{f(\underline{x}_0)} + \nabla f(\underline{x}_0) \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{=t\underline{v}} + \frac{1}{2} \left[ \left( Hf(\underline{x}_0) \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{=t\underline{v}} \right) \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{=t\underline{v}} \right] + o(\| \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{=t\underline{v}} \|^2) - \cancel{f(\underline{x}_0)}$$

Ora basta fare un paio di accorgimenti: intanto  $o(\|t\underline{v}\|^2) = o(t^2 \|\underline{v}\|^2) = t^2 \cdot o(\|\underline{v}\|^2)$ , quindi posso mettere in evidenza  $t^2$  e ottenere, a partire dalla disuguaglianza all'inizio (per cui questa quantità che stiamo approssimando è minore di 0):

$$t^2 \cdot \left( \frac{1}{2} (Hf(\underline{x}_0)\underline{v})\underline{v} + o(1) \right) \leq 0$$

Possiamo togliere il  $t^2$  e mantenere la disuguaglianza per il Teorema di Permanenza del segno applicato a  $t \rightarrow 0$ . Quindi siamo giunti alla tesi:

$$\boxed{\frac{1}{2} (Hf(\underline{x}_0)\underline{v})\underline{v} \leq 0} \implies Hf \text{ semidefinita negativa}$$

- Per quanto riguarda la seconda implicazione usiamo sempre Taylor:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \underbrace{\nabla f(\underline{x}_0)}_{=0} (\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2} (Hf(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)) (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2)$$

In cui il gradiente è 0 perchè per ipotesi  $\underline{x}_0$  è punto critico. Usando poi l'ipotesi che la matrice è definita negativa e il **Lemma 3.8.1**:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) &\leq \frac{1}{2} \lambda_{max} \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2) \\ &\leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 \underbrace{\left( \frac{1}{2} \lambda_{max} < 0 + \overset{-0}{o}(1) \right)}_{< 0} < 0 \end{aligned}$$

Quindi la tesi:

$$\boxed{\underline{x}_0 \text{ Punto di massimo}}$$

Il criterio di Sylvester poi è un modo efficace per valutare se una matrice simmetrica è semi/in/definita positiva/negativa, tramite l'uso delle sottomatrici.

### $\pi$ Proposizione 8: Criterio di Sylvester

Sia  $A \in M_{n,n}$  una matrice simmetrica. Siano poi  $|A_1| \dots |A_n|$  i determinanti dei minori principali (ovvero le sottomatrici nord-ovest), allora vale che:

- $A$  è **Definita Positiva** se  $|A_i| > 0$ ;
- $A$  è **Definita Negativa** se  $|A_{pari}| > 0$  e  $|A_{dispari}| < 0$ ;
- $A$  è **Semidefinita Positiva** se esiste almeno un  $|A_j| = 0$  e gli altri sono  $|A_i| > 0$ ;
- $A$  è **Semidefinita Negativa** se esiste almeno un  $|A_j| = 0$  e gli altri sono  $|A_{pari}| > 0$  e  $|A_{dispari}| < 0$ ;
- $A$  è **Indefinita** se nessuna delle precedenti.

## 3.8.2 Classificazione punti critici

Per trovare i punti critici, abbiamo diverse strategie, sintetizzabili in:

- Seguendo il **Teorema 3.8**, possiamo valutare i punti in cui si annulla il Gradiente, studiare l'Heissiana nei punti rispettivi e valutare quindi la natura dei punti secondo il risultato ottenuto dall'Heissiana;
- Se l'Heissiana è nulla possiamo studiare la funzione in direzioni diverse per vedere la crescita o la decrescita di questa (se è uniforme, quindi cresce sempre o decresce sempre in alcune direzioni del punto, potrebbe essere un punto di massimo o minimo, altrimenti se troviamo segni discordanti si tratterà di un punto di sella);
- Possiamo anche usare un pò di logica, per esempio qualora siamo in presenza di potenze tutte pari e quindi funzioni che sono sempre maggiori o minori di un certo valore;
- Se abbiamo un insieme in cui studiare i punti critici, bisogna anche tener conto del bordo di questo, e delle intersezioni che ha con la funzione.

### Esempio 19

La funzione  $f(x, y) = x^4 - y^4$  ha gradiente  $\nabla f = (4x^3, -4y^3)$  che si annulla solo nel punto  $\underline{x}_0 = (0, 0)$ . L'heissiana però è nulla in quel punto:

$$Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \longrightarrow Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

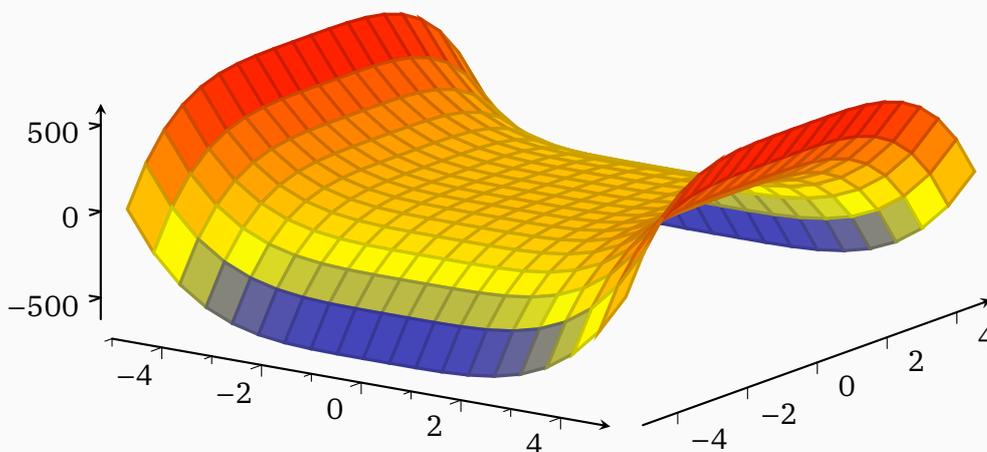
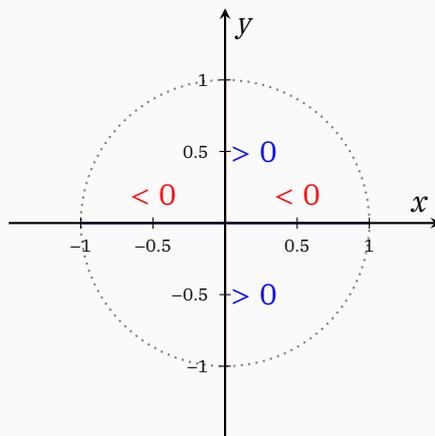
📄 Esempio 19 continued

Non ci da nessuna informazione. Studiando però la funzione nelle direzioni  $(x, 0)$  e  $(0, y)$  vediamo che:

$$\begin{cases} f(x, 0) = x^4 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \\ f(0, y) = -y^4 < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Concludiamo che all'avvicinarsi del punto critico  $f$  assume valori discordanti, per cui esso è un **Punto di sella**.

Vediamo graficamente lo studio che abbiamo fatto intorno al punto e la funzione. Ricordiamoci che in questo caso abbiamo usato la proprietà che i valori sono sempre maggiori o minori di 0, altrimenti avremmo dovuto fare il limite



**π Teorema 13:** Teorema di Weistrass Generalizzato

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  chiuso e illimitato. Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e Coerciva in  $A$  allora  $f$  ammette minimo assoluto in  $A$ .

**✓ Dimostrazione 11:** Caso  $A = \mathbb{R}^n$

Sia  $M := f(\underline{0})$ , per definizione di coercività  $\exists R_M > 0 : f(\underline{x}) > M \forall \underline{x} : \|\underline{x}\| > R_M$ . Considero allora la palla che ha come raggio questo valore e centrata in  $\underline{0}$ , ovvero  $B_{R_M}(\underline{0})$  che è un insieme compatto e in cui  $f$  è continua. Per Weistrass normale  $\exists \underline{x}_m \in B_{R_M}(\underline{0}) : f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}) \forall \underline{x} \in B_{R_M}(\underline{0})$ . A questo punto  $\underline{x}_m$  è punto di minimo assoluto per  $f$  in  $\mathbb{R}^n$  perchè:

- Se  $\|\underline{x}\| > R_M \implies f(\underline{x}) > M = f(\underline{0}) \leq f(\underline{x}_m)$ ;
- Se  $\|\underline{x}\| \leq R_M \implies f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_m)$  perchè  $\underline{x}_m$  minimo nella palla.

*Osservazione:* Una funzione è coerciva se è tale che  $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow +\infty} f(\underline{x}) = +\infty$ .

# 4

# Convessità, Funzioni Implicite



## Sommario

- 4.1 Funzioni Convesse, 67
- 4.2 Teoremi del Dini, 68
- 4.3 Funzione inversa e Moltiplicatori di Lagrange, 74

## 4.1 Funzioni Convesse

### Definizione 50: Insiemi Convessi

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **Convesso** se  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A \implies \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y} \in A \forall \lambda \in [0, 1]$ .

### Definizione 51: Funzioni Convesse

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  convesso  $\implies f$  **Convessa** (strettamente). Ovvero vale la relazione:

$$f(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y}) \leq \lambda f(\underline{x}) + (1 - \lambda) f(\underline{y}) \quad (4.1)$$

E questo  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$ .

*Osservazione:* chiaramente una funzione  $f$  è concava se non è convessa, o per meglio dire se  $-f$  è convessa.

Le proprietà delle funzioni convesse sono:

- Se  $f$  convessa  $\implies f$  continua;
- Se  $f$  convessa  $\implies f$  derivabile  $\iff f$  differenziabile;
- Se  $f$  differenziabile  $\implies f$  convessa  $\iff f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$ ;
- Se  $f \in C^2(A) \implies f$  convessa  $\iff Hf$  semidefinita positiva per ogni vettore;
- Se  $f \in C^2(A) \implies f$  strettamente convessa  $\iff Hf$  definita positiva;
- Se  $\underline{x}_0$  punto critico di una  $f$  differenziabile in  $A$ , questa è convessa;

### Dimostrazione 12: Di proprietà 6

Da ipotesi e da  $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \implies f$  convessa, e questa relazione è vera perchè  $\underline{x}_0$  punto critico (è indifferente che punto critico, convessità o concavità valgono uguale).

- Se  $f$  strettamente convessa  $\implies f$  il punto di minimo è unico;

### Dimostrazione 13: Di proprietà 7

Se  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  punti di minimo tali che  $f(\underline{x}_1) = f(\underline{x}_2) = m$  per definizione di convessità vale

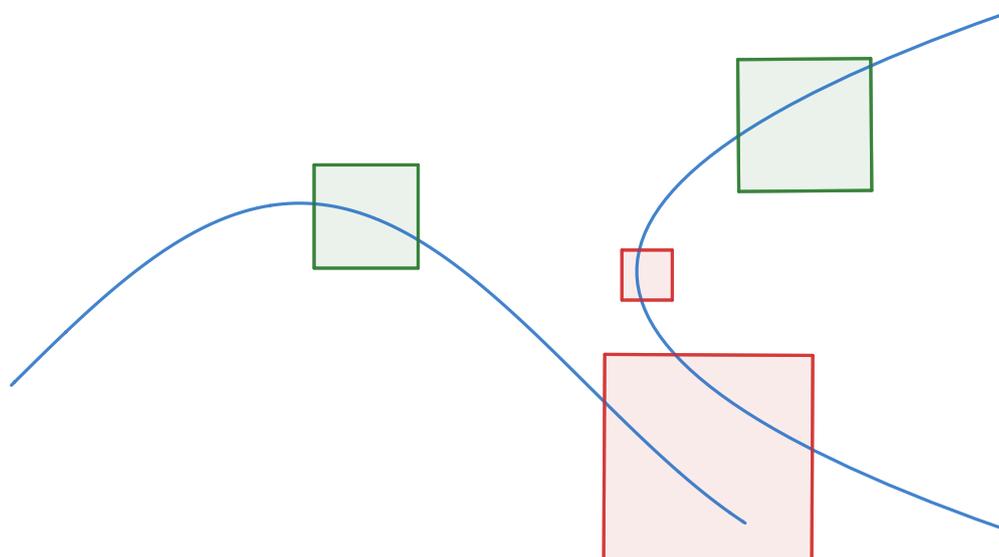
$$f(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) < \lambda f(\underline{x}_1) + (1 - \lambda) f(\underline{x}_2) = m$$

$\lambda m$                        $m - \lambda m$

Ma ciò implicherebbe che a sinistra ho qualcosa di minore del minimo, assurdo.

## 4.2 Teoremi del Dini

Se prendo il dominio di una funzione, mi accorgo che in alcuni punti sono in grado di disegnare il grafico di una funzione (non curva, funzione!), mentre in altri no, come in questo esempio:



### $\pi$ Teorema 14: Teorema del Dini

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(A)$  con  $A$  aperto e sia  $(x_0, y_0) \in A : F(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ , allora valgono le seguenti:

- $\exists \begin{matrix} I_{x_0} \in \mathbb{R} \\ J_{y_0} \in \mathbb{R} \end{matrix}$  del tipo  $I = (x_0 - a; x_0 + a)$ ,  $a > 0$  e viceversa, tali che  $I \times J \in A$ ;
- $\exists g : I \rightarrow J : F(x, y) = 0 \iff_{\text{in } I \times J} y = g(x)$ ;
- $g \in C^1(I)$  e la sua derivata è:

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, g(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, g(x))}} \quad (4.2)$$

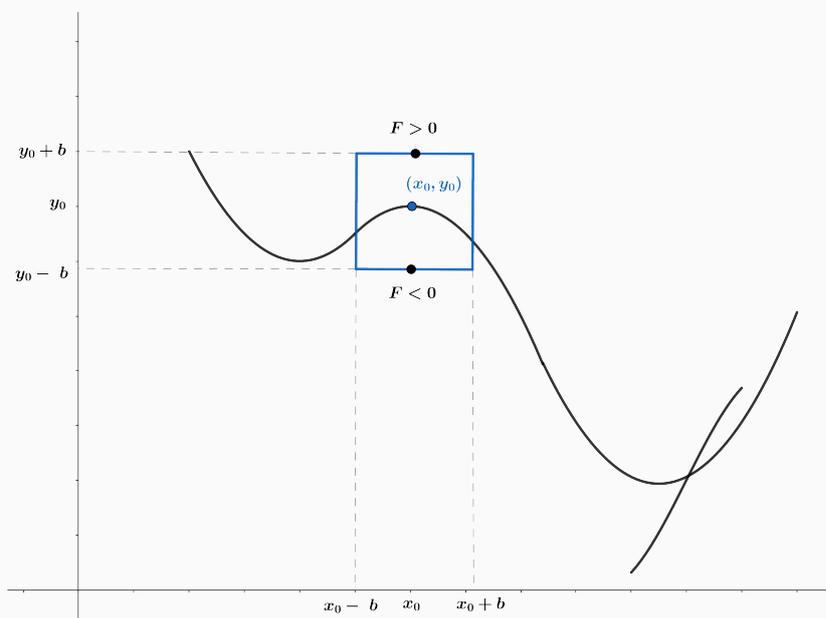
✓ **Dimostrazione 14:** Considerando  $\partial_y F > 0$ , è analogo

Spezziamo la dimostrazione in due passi, il primo sarà definire  $g$  e il secondo è la continuità e la derivata.

1. Siccome la derivata parziale è non nulla e maggiore di 0 per ipotesi, applicando il teorema della permanenza del segno e ottengo che la derivata è maggiore di 0 in un certo intorno, ovvero

$$\exists b > 0 : \partial_y F > 0 \text{ in } [x_0 - b; x_0 + b] \times [y_0 - b; y_0 + b]$$

Siccome la derivata è maggiore di 0 e la funzione nel punto è 0, allora la funzione che associa a  $y \mapsto F(x_0, y)$  è strettamente crescente in  $[y_0 - b; y_0 + b]$ , quindi  $F(x_0, y_0 - b) < 0 < F(x_0, y_0 + b)$ .



Siano poi  $\begin{cases} x \mapsto F(x, y_0 + b) \\ x \mapsto F(x, y_0 - b) \end{cases}$  con  $x \in [x_0 - b, x_0 + b]$  restrizioni sui segmenti.

Per il teorema di permanenza del segno in una dimensione ho anche l'esistenza di  $a$ , ovvero

$$\exists a > 0 : \begin{cases} F(x, y_0 + b) > 0 \\ F(x, y_0 - b) < 0 \end{cases} \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

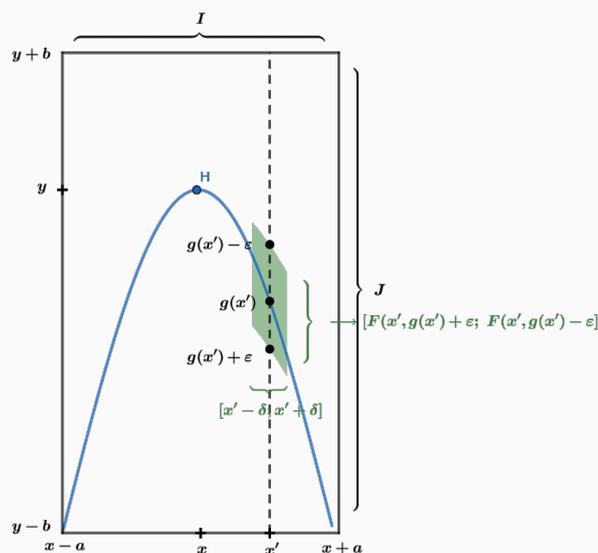
Abbiamo ottenuto  $I, J$ . Ogni  $x \in I$  è tale che  $F(x_0, y_0 - b) < 0 < F(x_0, y_0 + b)$ , inoltre la derivata è maggiore di 0 e quindi in modo più generico rispetto a prima la funzione  $y \mapsto F(x, y)$  è strettamente crescente in  $[y_0 - b; y_0 + b]$ . Se la funzione è strettamente monotona con valori prima negativi e poi positivi, allora  $\exists y_x \in [y_0 - b; y_0 + b] : F(x, y_x) = 0$ , e siccome questo vale per  $x \in I$ , ho la ben definita  $g(x) := y_x \forall x \in I$ . Quindi nell'insieme  $I \times J$  ho che  $F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$ . In particolare il viceversa vale perchè posso invece fissare la  $x$  e ottenere la stessa cosa.

✓ Dimostrazione 14 continued

2. Adesso dobbiamo sostanzialmente dimostrare la condiziona di continuità, ovvero che  $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |g(x) - g(x')| < \epsilon \forall x \in I : |x - x'| < \delta$ . Posso prendere per esempio un intervallo  $(g(x') - \epsilon; g(x') + \epsilon) \subseteq J$ . Siccome  $\partial_y F > 0$  in  $I \times J$  e  $F(x', g(x')) = 0$ , posso restringermi lungo la retta lungo  $x'$  e ho che (similmente a prima):

$$\begin{aligned} F(x', g(x')) &= 0 \\ F(x', g(x') + \epsilon) &> 0 \\ F(x', g(x') - \epsilon) &< 0 \end{aligned}$$

Questo può essere raffigurato similmente a quanto abbiamo fatto prima:



Per il Teorema di permanenza del segno applicato alle funzioni che mi mandano  $x$  in  $F(x, g(x') \pm \epsilon)$  ho l'esistenza di un  $\delta$  che scandisce un intervallo in cui vale la maggioranza della funzione rispetto a  $\pm \epsilon$ , ovvero:

$$\begin{aligned} x \mapsto F(x, g(x') + \epsilon) \\ x \mapsto F(x, g(x') - \epsilon) \end{aligned} \xrightarrow{\text{Teo. perm. segno}} \exists \delta > 0 : (x' - \delta; x' + \delta) \subseteq I,$$

$$F(x, g(x') - \epsilon) < \underset{=F(x, g(x))}{0} < F(x, g(x') + \epsilon) \forall x \in (x' - \delta; x' + \delta)$$

Questo, che vale  $\forall x \in I : |x - x'| < \delta$ , unito al fatto che  $F_y > 0$  ci da che  $g(x') - \epsilon < g(x) < g(x') + \epsilon$ , ovvero  $|g(x) - g(x')| < \epsilon \forall x \in I : |x - x'| < \delta$ .

✓ Dimostrazione 14 continued

Adesso consideriamo un altro minipasso aggiuntivo per dimostrare l'appartenenza alla Classe 1. Consideriamo  $x \in I, h \neq 0 : x + h \in I$ . Considero allora  $F(x + h, g(x + h)) - F(x, g(x)) = 0$  poichè entrambi i membri sono nulli, in particolare il primo per il 2° passo. Applicando Lagrange a  $F$  otteniamo che

$$0 = \nabla F(\xi, \eta) \cdot (h, g(x + h) - g(x))$$

Con  $\xi, \eta \in [(x + h, g(x + h)); (x, g(x))]$ . Posso riscrivere questa cosa come il rapporto incrementale  $\Delta x / \Delta y$  rispetto alla funzione  $g$ , ovvero  $\frac{g(x + h) - g(x)}{h}$ , questo a partire da quanto trovato dal teorema di Lagrange diviso per  $h$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot h \right] \cdot \frac{1}{h} + \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot (g(x + h) - g(x)) \right] \cdot \frac{1}{h} \\ 0 &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\xi, \eta)} \right] + \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot \frac{(g(x + h) - g(x))}{h} \right] \\ \implies \frac{g(x + h) - g(x)}{h} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\xi, \eta)}}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\xi, \eta)}} \end{aligned}$$

Facendo il limite del rapporto incrementale appena trovato (per dimostrare la derivabilità) e ricordandoci che, essendo  $g$  continua ho  $(\xi, \eta) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (x, g(x))$  allora la derivata di  $g$  è la seguente:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\xi, \eta)}}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\xi, \eta)}} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, g(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, g(x))}}$$

Siccome poi  $\partial_x F, \partial_y F, g$  sono tutte continue  $\implies g' \in C^0 \implies g \in C^1(I)$ .

*Osservazione:* Abbiamo supposto  $\partial_y F \neq 0$ , ma se fosse il contrario avremmo invece una funzione implicita del tipo  $x = h(y)$  e la derivata con numeratore e denominatore invertiti. In generale basta quindi che  $\nabla F \neq 0$ .

Se volessimo calcolare invece la derivata seconda  $g''(x)$ , deriviamo e troviamo che

$$g''(x) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^3} \quad (4.3)$$

### Definizione 52: Punti regolari e non

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(A)$  con  $A$  aperto,  $k \in \mathbb{R}$  e  $z_k := \{\underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) = k\}$  "insieme di livello", allora  $\underline{x}_0 \in A$  è detto:

- **Punto regolare** per  $f$  se  $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$ ;
- **Punto singolare** per  $f$  se  $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

### Definizione 53: Insieme di livello

Sia  $z_k := \{\underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) = k\}$ , esso è effettivamente un **Insieme di livello regolare** se non contiene punti singolari e  $k$  è un valore regolare.

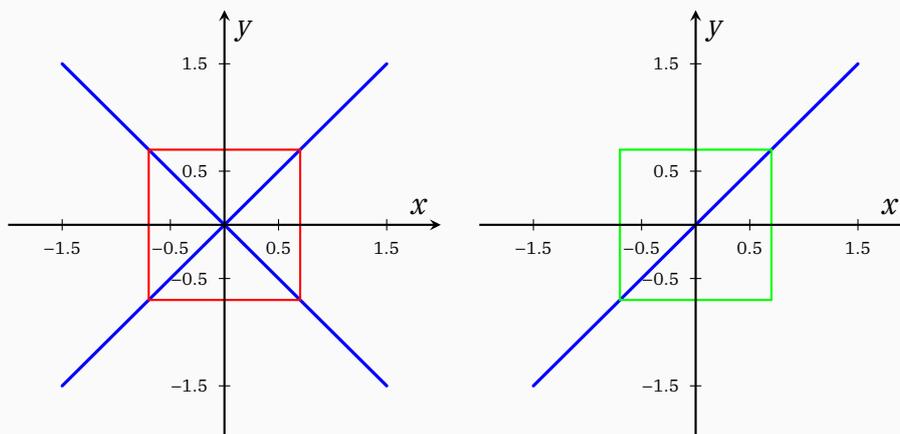
*Osservazione:* Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(A)$  con  $A$  aperto e  $(x_0, y_0) \in A$  punto regolare, allora per Dini localmente  $z = \{\underline{x} \in A \mid f(x, y) = f(\underline{x}, \underline{y})\}$  è il grafico di una funzione. Se invece il gradiente si annulla questo non è detto che sia vero o falso.

### Esempio 20

Prese le funzioni

$$\begin{cases} f = x^2 - y^2 \\ g = (x - y)^3 \end{cases}$$

Queste hanno entrambe  $\nabla = 0$  nell'origine. Eppure nel caso della prima non posso definire il grafico di una funzione localmente, ma nel caso della seconda si.



**π Teorema 15:** Teorema del Dini con  $A \in \mathbb{R}^3$

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(A)$  con  $A$  aperto e sia  $(x_0, y_0, z_0) \in A : F(x_0, y_0, z_0) = 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$ , allora valgono le seguenti:

- $\exists \begin{matrix} I_{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2} \\ J_{z_0 \in \mathbb{R}} \end{matrix}$  del tipo  $I = (z_0 - a; z_0 + a)$ ,  $a > 0$  e viceversa, tali che  $I \times J \in A$ ;
- $\exists g : I \rightarrow J : F(x, y, z) = 0 \iff z = g(x, y)$ ;
- $g \in C^1(I)$  e le sue derivate sono:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, y, g(x, y))}}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, g(x, y))}} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, y, g(x, y))}}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, g(x, y))}} \quad (4.5)$$

Se volessi trovare il piano tangente alla  $g$  (per approssimare questa funzione anche se non la conosco, l'importante è che so che esiste), allora questo è

$$\pi_{\underline{x}_0} = g(\underline{x}_0) + \nabla g(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$

Ovvero sviluppando con le formule del Teorema:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

**π Teorema 16:** Teorema del Dini generico

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(A)$ , con  $\underline{x} \in \mathbb{R}^m, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ . Sia poi  $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in A : F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = 0$  e  $|JF_{\underline{y}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)| \neq 0$  (ovvero con rango massimo), allora valgono:

- $\exists \begin{matrix} I_{\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m} \\ J_{\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n} \end{matrix}$  tali che  $I \times J \in A$ ;
- $\exists g : I \rightarrow J : F(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{y} = g(\underline{x})$ ;
- $g \in C^1(I)$  il suo Jacobiano è:

$$Jg(\underline{x}) = - [JF_{\underline{y}}(\underline{x}, g(\underline{x}))]^{-1} \cdot JF_{\underline{x}}(\underline{x}, g(\underline{x})) \quad (4.7)$$

## 4.3 Funzione inversa e Moltiplicatori di Lagrange

### $\pi$ Teorema 17: Teorema della funzione inversa

Sia  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(A)$  con  $A$  aperto e  $\underline{y}_0 \in A : |J\varphi(\underline{y}_0)| \neq 0$ , allora valgono le seguenti:

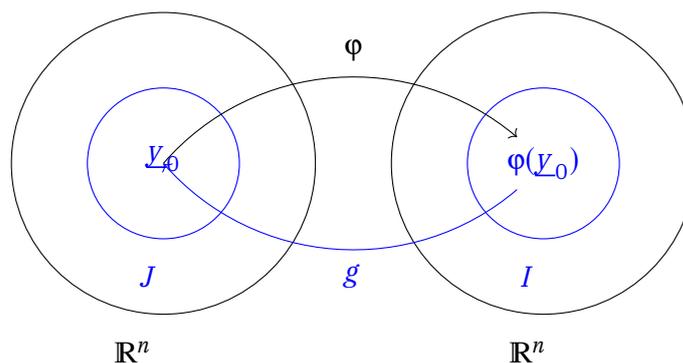
- $\exists \begin{matrix} I_{\varphi(\underline{y}_0)} \subseteq \mathbb{R}^n \\ J_{\underline{y}_0} \subseteq \mathbb{R}^n \end{matrix}$ ;
- $\exists g : I \mapsto J \in C^1(A)$  e  $\varphi : J \mapsto I$  è un **Diffomorfismo locale** (cioè è  $C^1$  con inversa  $C^1$ ), Infine  $\varphi^{-1} \equiv g$

Dimostrazione alla pagine seguente.

### $\equiv$ Definizione 54: Punti e valori singolari

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(A)$  con  $A$  aperto:

- Un punto  $\underline{x}_0 \in A$  si dice **Regolare** se  $rk(JF(\underline{x}_0)) = n$ ;
- Un punto  $\underline{x}_0 \in A$  si dice **Singolare** se  $rk(JF(\underline{x}_0)) < n$ ;
- L'insieme  $z_{\underline{c}} := \{\underline{x} \in A \mid F(\underline{x}) = \underline{c}\}$  è un **Valore Regolare** (di  $F$ ) se tutti i punti che ne fanno parte sono regolari



✓ **Dimostrazione 15:** Teorema funzione Inversa

Definiamo una

$$F : \mathbb{R}^n \times A \subseteq \mathbb{R}^{n+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\underline{x}, \underline{y}) \longrightarrow \varphi(\underline{y}) - \underline{x}$$

Che è di classe  $C^1$ . Sia poi il punto  $\underline{x}_0 := \varphi(\underline{y}_0)$ , allora avrò che

$$|JF_{\underline{y}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)| = |J\varphi(\underline{y}_0)| \neq 0$$

E questo perchè derivando solo rispetto a  $y$  non ho mai la variabile  $x$ , inoltre per ipotesi lo jacobiano è diverso da 0. Siccome  $F \in C^1$ , e  $F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \varphi(\underline{y}_0) - \underline{x}_0 = 0$  posso applicare il teorema del Dini, e quindi

$$\exists \begin{matrix} I_{\underline{x}_0} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \tilde{J}_{\underline{y}_0} \subseteq \mathbb{R}^n \end{matrix}, \exists g : I \mapsto \tilde{J} : F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = 0 \stackrel{\text{in } I \times \tilde{J}}{\iff} \underline{y} = g(\underline{x})$$

Ovvero  $\underline{x} = \varphi(\underline{y}) \iff F(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{y} = g(\underline{x})$ , insomma un bel giro. Da qui considero l'immagine di  $g$  sul dominio e la chiamo  $J = g(I)$  (il Teorema del Dini non afferma che l'intorno che esiste e che posso prendere per la funzione sono esattamente dominio e codominio), quindi adesso  $g : I \mapsto J(\subseteq \tilde{J})$ , e se calcolo  $\varphi(g(\underline{x})) = \varphi(\underline{y}) = \underline{x} \forall \underline{x} \in I$ , quindi la composizione delle funzioni è la matrice identità:  $\varphi \circ g = Id_I$ .

Adesso facciamo lo stesso al contrario, sia  $\underline{y} \in J \implies \exists \underline{x}_0 \in I : \underline{y} = g(\underline{x}_0)$  (per questo abbiamo preso l'immagine, col il primo  $\tilde{J}$  non era detta vera questa relazione). Adesso è facile, se provo a calcolare  $g(\varphi(\underline{y})) = g(\underline{x}) = \underline{y} \forall \underline{y} \in J$ , quindi di nuovo  $g \circ \varphi = Id_J$ . Da qui basta osservare che:

$$J = g(I) = \{\underline{y} \in A \mid \underline{y} = g(\underline{x}) \forall \underline{x} \in I\} \\ = \varphi^{-1}(I) = \{\underline{y} \in A \mid \varphi(\underline{y}) \in I\} \\ \implies g = \varphi^{-1}$$

**π Teorema 18:** Moltiplicatori di Lagrange

Siano  $F, f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(A)$  e  $\underline{x}_0 \in A$  punto di max/min relativo di  $f$  ristretto all'insieme di livello  $\{F = 0\}$ . Sia inoltre  $\nabla F(\underline{x}_0) \neq 0$ , allora i gradienti delle funzioni sono linearmente dipendenti, ovvero:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{x}_0) = \lambda_0 \cdot \nabla F(\underline{x}_0) \quad (4.8)$$

Un altro modo per dire quanto appena espresso con l'Equazione 4.8 è che il rango della matrice composta dai due gradienti è 1, ovvero il determinante di tale matrice è 0 (questo è molto utile negli esercizi). Quindi un altro modo per trovare i punti critici di  $f$  è tramite la condizione:

$$\begin{vmatrix} \text{---} & \nabla f(\underline{x}_0) & \text{---} \\ \text{---} & \nabla F(\underline{x}_0) & \text{---} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

**✓ Dimostrazione 16:** Caso  $n = 2$

Applicando Dini, con le condizioni già verificate che  $F \in C^1, F(\underline{x}_0) = 0, \nabla F(\underline{x}_0) \neq 0$ , supponendo che la derivata parziale non nulla sia  $\partial_y F(\underline{x}_0)$  (ovviamente è uguale, ma siamo coerenti con quanto dimostrato fin ora), allora

$$\exists \begin{matrix} I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \\ J_{y_0} \subseteq \mathbb{R} \end{matrix} : F(x, y) = 0 \iff y = g(x) \in C^1(A), g : I \mapsto J, F(x, y) = 0 \forall x \in I$$

Insomma le solite implicazioni. Se ora deriviamo il vettore  $F(x, g(x))$  rispetto a  $x$  otteniamo:

$$\frac{\partial [F(x, g(x))]}{x} = \nabla F(x, g(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = 0$$

E questo è sempre zero perchè sviluppando otteniamo 0. In particolare vale per  $x_0, y_0 = x_0, g(x_0)$ , e mettiamo da parte questa informazione.

Adesso definiamo  $h := f(x, g(x)) \forall x \in I$  (ovvero  $f$  ristretta al vincolo), e ovviamente  $h \in C^1$ , quindi per il Teorema di Fermat  $h'(x_0) = 0$  (ricordando che Fermat dice che una funzione continua ha derivata nulla nei punti stazionari, e per come abbiamo definito  $h$  varrà che  $x_0$  è un punto stazionario). Questo vuol dire, similmente a quanto detto prima, che:

$$h'(x) = \frac{\partial [f(x, g(x))]}{x} = \nabla f(x, g(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} \implies \nabla f(x_0, g(x_0)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Mettiamo anche questo da parte. Adesso abbiamo trovato che entrambi i gradienti sono perpendicolari allo stesso vettore non nullo (il loro prodotto scalare fa 0), quindi

✓ Dimostrazione 16 continued

sono paralleli:

$$\begin{cases} \nabla F(x_0, y_0) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} \\ \nabla f(x_0, y_0) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0 \end{cases} \implies \boxed{\nabla F(x_0, y_0) // \nabla f(x_0, y_0)}$$

Per usare questo teorema negli esercizi, definiamo un vincolo e mettiamo a sistema la condizione della funzione uguale a 0 alla condizione di parallelismo dei gradienti (tramite  $\lambda$  o tramite la matrice, non cambia nulla).

### Esempio 21

Consideriamo una funzione facile, ovvero  $f(x, y) = x + y$ . Questa funzione non ha massimo o minimo, è un piano obliquo. Consideriamo poi il vincolo  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , che possiamo esprimere con la funzione  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  (sono due cose diverse, il vincolo rappresenta il cilindro infinito di raggio 1, mentre la funzione  $F$  è un paraboloide, ma ci serve esprimerlo così per calcolare i punti). Adesso, siccome i gradienti sono facili da calcolare, vediamo subito il determinante della matrice formato da questi due:

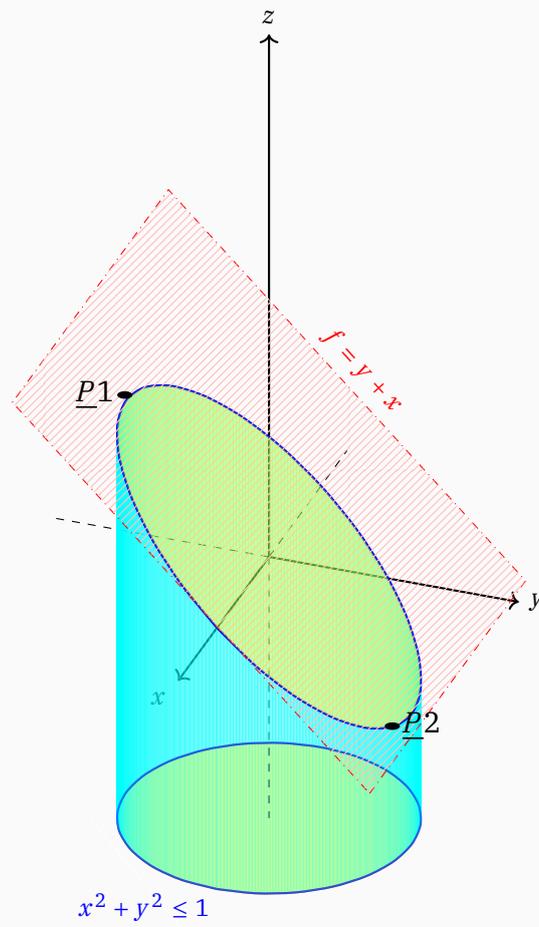
$$\begin{vmatrix} \text{——} & \nabla f(\underline{x}_0) & \text{——} \\ \text{——} & \nabla F(\underline{x}_0) & \text{——} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x$$

Ora sappiamo che questo deve essere 0, ma anche la funzione che esprime il vincolo deve essere 0, quindi mettiamo a sistema;

$$\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \begin{cases} P_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ P_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

Abbiamo trovato i due punti critici della funzione ristretta all'insieme.

Esempio 21 continued



# 5

# Integrali curvilinei e Forme differenziali



## Sommario

- 5.1 Integrali curvilinei, 80
- 5.2 Integrali di 2<sup>a</sup> specie curvilinei, 87
- 5.3 Forme Differenziali, 90

Introduciamo adesso diversi concetti, dalla lunghezza delle curve, al lavoro su una curva, fino alle forme differenziabili e i campi vettoriali.

## 5.1 Integrali curvilinei

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva. Considero la partizione  $\pi_i$  dell'intervallo e la poligonale inscritta nella curva di vertici  $\underline{\varphi}(t_0), \underline{\varphi}(t_1) \dots \underline{\varphi}(t_k)$  la quale lunghezza è

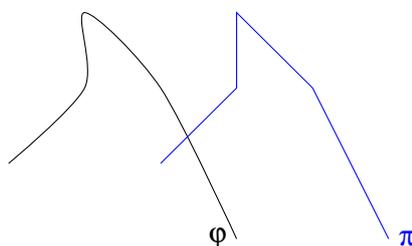
$$L_\pi = \sum_{j=0}^k \|\underline{\varphi}(t_{j+1}) - \underline{\varphi}(t_j)\| \quad (5.1)$$

Quindi la lunghezza generica della curva è:

$$L_\varphi := \{L_\pi(\varphi) | \pi \text{ partizione di } [a, b]\} \quad (5.2)$$

Questa però è una definizione non operativa. Osserviamo che dividendo la lunghezza della partizione otteniamo una derivata, di cui possiamo farne il limite e ottenere l'integrale:

$$L_\pi = \sum_{j=0}^k \frac{\|\underline{\varphi}(t_{j+1}) - \underline{\varphi}(t_j)\|}{(t_{j+1} - t_j)} \cdot (t_{j+1} - t_j)$$



Quindi, senza dimostrarlo, scriviamo la formula della lunghezza della curva.

### **Definizione 55:** Lunghezza curva

Data la curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la sua **Lunghezza**  $L_\varphi$  è:

$$L_\varphi = \int_\varphi \|\underline{\varphi}'(t)\| dt < +\infty \quad (5.3)$$

La definizione è però indipendente dalla parametrizzazione? Prendiamo una circonferenza con tre parametrizzazioni diverse e vediamo se è così (spoiler: sì).

Abbiamo le tre curve:

$$\begin{aligned}\varphi_1 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (R \cos(t), R \sin(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longrightarrow (R \cos(2s), R \sin(2s))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 : [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longrightarrow (R \cos(\theta), R \sin(\theta))\end{aligned}$$

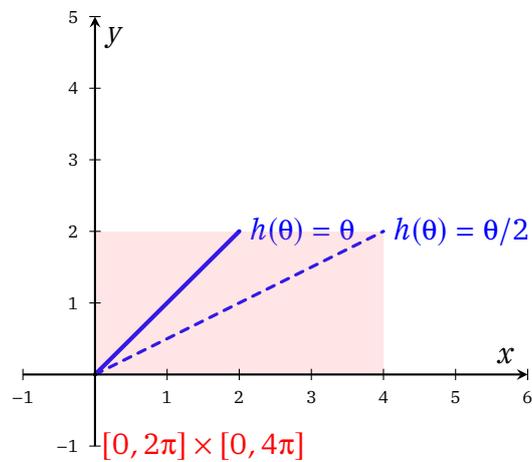
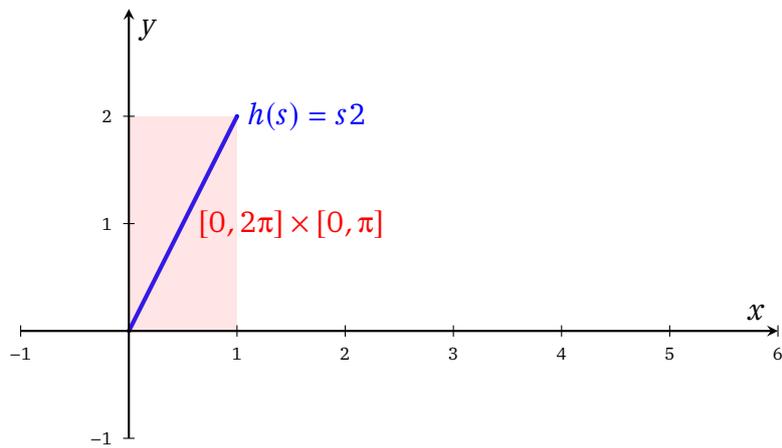
La differenza sostanziale è che le prime due sono percorse a due velocità diverse (una il doppio dell'altra), ma ci aspettiamo la stessa lunghezza. La terza invece percorre due volte la circonferenza, allora dovrò avere che  $L_{\varphi_3} = 2L_{\varphi_1}$ . Vediamo se è così:

$$L_{\varphi_1} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt = Rt \Big|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi R}$$

$$L_{\varphi_3} = \int_0^{4\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(\theta) + R^2 \cos^2(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} d\theta = R\theta \Big|_0^{2\pi} = \boxed{4\pi R} = 2L_{\varphi_1}$$

$$L_{\varphi_2} = \int_0^{\pi} \sqrt{\left[-2R \sin(2s)\right]^2 + \left[2R \cos(2s)\right]^2} ds = \int_0^{\pi} \sqrt{4R^2} du = 2Ru \Big|_0^{\pi} = \boxed{2\pi R}$$

Abbiamo verificato la veridicità della nostra definizione, ma ci serve un modo migliore per esprimere questo concetto. Lo posso fare definendo le prime due curve **Equivalenti** tramite una funzione  $h(s) := 2s$  che è t.c.  $h : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$ . Questa cosa con  $\varphi_3$  non può essere fatta per ovvi motivi, non posso coprire tutto l'intervallo e allo stesso tempo avere l'uguaglianza della curva. Se faccio  $h(\theta) = \theta$  rendo le curve "uguali" ma non copro tutto l'intervallo  $[0, 2\pi] \times [0, 4\pi]$  mentre se faccio  $h(\theta) = \theta/2$  copro tutto l'intervallo che mi serve, ma per ogni punto in questo intervallo le curve non sono uguali, siccome  $\cos(\theta) \neq \cos(\theta/2)$ .



Definiamo allora le curve equivalenti.

**Definizione 56:** Curve equivalenti

Siano  $\begin{cases} \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$  due curve, esse si dicono **Equivalenti** se

$\exists h : [c, d] \rightarrow [a, b] \in C^1$ , biunivoca, t.c.  $h' \neq 0$  in  $[c, d]$ , tale per cui  $\gamma(t) = \varphi(h(t)) \forall t \in [c, d]$ .

### π Proposizione 9

Due curve equivalenti hanno lunghezza uguale.

### ✓ Dimostrazione 17

Prendiamo le curve definite in [Definizione 5.1](#) equivalenti tramite  $h$  e calcoliamo:

$$L_\gamma = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \int_c^d \|\varphi'(h(t)) \cdot h'(t)\| dt$$

Siccome poi  $h'(t) \neq 0$  ed è uno scalare, lo porto fuori e faccio il cambio di variabile  $s = h(t)$ ,  $ds = h'(t)$  e ottengo:

$$L_\gamma = h'(t) \cdot \int_c^d \|\varphi'(h(t))\| dt \xrightarrow{s=h(t)} \int_a^b \|\varphi'(s)\| ds = L_\varphi$$

Notiamo però una cosa particolare: se  $h' > 0 \implies |h'| = -h'$  e la funzione è decrescente, quindi vanno cambiati gli estremi di integrazioni e ci si ritrova con un risultato uguale ma opposto. In poche parole vuol dire che abbiamo percorso la curva al contrario, e quindi ovviamente il risultato è negativo. Questo leva la condizione di equivalenza perchè la lunghezza non è uguale: se stiamo percorrendo la curva al contrario, porre un segno meno ci garantisce la condizione verificata.

### π Proposizione 10: Lunghezze per varie curve

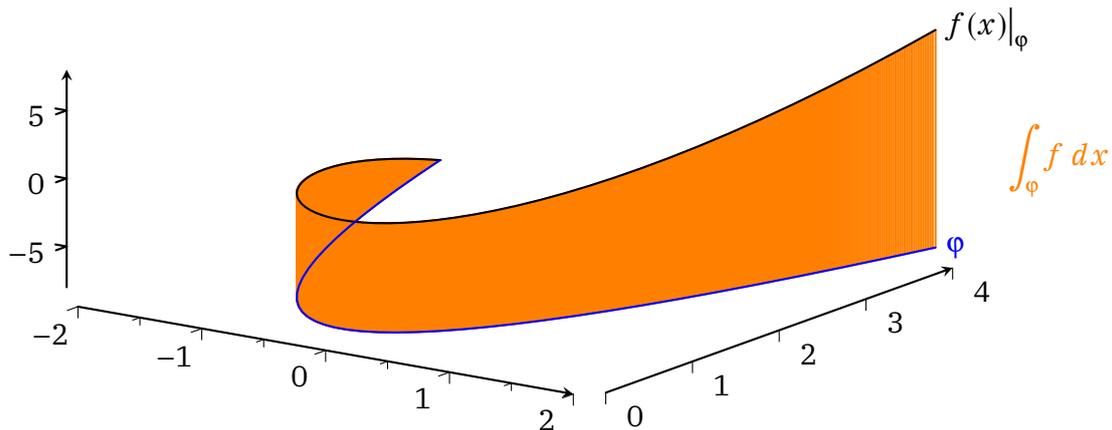
Vista una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vediamo la lunghezza in base a come esprimiamo la curva stessa:

- Per **Curve qualsiasi** abbiamo già visto che  $L_\varphi = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dx$ ;
- Per **Curve Cartesiane** abbiamo che  $L_\varphi = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ;
- Per **Curve Polari** abbiamo che  $L_\varphi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2} d\theta$

**Definizione 57:** Integrale lungo una curva

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  regolare a tratti, allora definiamo l'integrale di  $f$  lungo la curva come:

$$\int_{\varphi} f dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt \quad (5.4)$$



**Proposizione 11**

Siano  $\varphi, \gamma$  regolari a tratti con sostegno  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Siano poi  $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Siano anche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora valgono le seguenti:

- $\int_{\varphi} (\alpha f + \beta g) dt = \alpha \int_{\varphi} f dt + \beta \int_{\varphi} g dt ;$
- $\int_{\gamma \cup \varphi} f dt = \int_{\gamma} f dt + \int_{\varphi} f dt$

Definiamo poi degli oggetti matematici che chiamiamo Massa, Baricentro e Momento di Inerzia (ovviamente come riferimento a questi oggetti nel mondo fisico). Li definiremo più volte.

### **Definizione 58:** Massa, Baricentro, Momento di Inerzia

Sia la curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia la densità di massa una funzione definita come  $\mu : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , allora definiamo i tre oggetti matematici:

- **Massa**  $M := \int_{\varphi} \mu dt$ ;
- **Centro di Massa (o Baricentro)**, un vettore  $\underline{x}_B \in \mathbb{R}^n$  in cui ogni componente vale  $x_{j_B} := \frac{1}{M} \int_{\varphi} \mu x_j dt, \forall j = 1 \dots n$ ;
- **Momento di inerzia**  $I_r := \int_{\varphi} \mu d^2(x, r) dt$ ;

In particolare, il momento di inerzia è rispetto a una retta  $r$ , e  $d^2$  è la distanza dal punto alla retta.

### **Definizione 59:** Ascissa Curvilinea

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare, allora definiamo l'ascissa curvilinea come

$$s(t) := \int_a^t \|\underline{\varphi}'(\sigma)\| d\sigma \quad (5.5)$$

### **Definizione 60:** Vettore Accelerazione

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^2$  una curva. Posso definire il vettore accelerazione come

$$\varphi''(t) = (\varphi_1''(t) \dots \varphi_n''(t)) \quad (5.6)$$

In cui  $s \in C^1$  e monotona crescente (poichè il modulo è sempre positivo), quindi la funzione  $s : [a, b] \rightarrow [0, L_{\varphi}]$  è invertibile e posso definire  $s^{-1} = t(s)$  in cui  $s^{-1} : [0, L_{\varphi}] \rightarrow [a, b]$  e la derivata è

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{\|\underline{\varphi}'(t(s))\|} > 0$$

Adesso introduciamo una nuova curva  $\tilde{\varphi}(s) := \varphi(t(s))$ ,  $s \in [0, L_{\varphi}]$  e lo scopo di tutto questo è dimostrare che le curve  $\varphi, \tilde{\varphi}$  son equivalenti tramite l'inversa dell'ascissa curvilinea. Questo può essere fatto a partire dalle osservazioni che  $t \in C^1, t' > 0, t$  è invertibile e  $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(t(s))$ , quindi la mappa è equivalente e le curve hanno stesso sostegno percorso nello stesso verso. Se ora calcolo

$$\|\tilde{\varphi}'(s)\| = \left\| \frac{d}{ds}(\varphi(t(s))) \right\| = \|\varphi'(t(s)) \cdot t'(s)\| = \left\| \cancel{\varphi'(t(s))} \cdot \frac{1}{\cancel{\|\varphi'(t(s))\|}} \right\| = 1$$

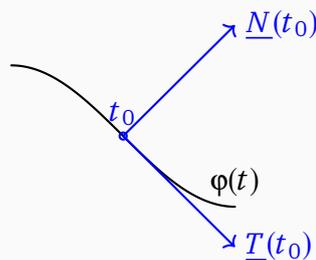
Perchè abbiamo fatto tutto questo? In generale  $\varphi'$  non è sempre ortogonale al vettore accelerazione. Parametrizzando però con l'ascissa curvilinea sì, perchè il modulo della derivata è sempre 1, quindi in particolare  $\tilde{\varphi}'(s) \cdot \tilde{\varphi}'(s) = 1$  e derivando questa quantità ottengo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(1) &= \frac{d}{ds}(\tilde{\varphi}'(s) \cdot \tilde{\varphi}'(s)) \\ 0 &= \tilde{\varphi}''(s) \cdot \underbrace{\tilde{\varphi}'(s)}_{=1} + \underbrace{\tilde{\varphi}'(s)}_{=1} \cdot \tilde{\varphi}''(s) \\ 0 &= 2\tilde{\varphi}''(s) \\ \implies \tilde{\varphi}'(s) &\perp \tilde{\varphi}''(s) \end{aligned}$$

Questo può inoltre essere vantaggioso nel calcolo degli integrali: siccome le curve sono equivalenti, posso calcolare la lunghezza della curva con la parametrizzazione dell'ascissa curvilinea.

### **Definizione 61:** Versore Normale

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare, e sia  $\underline{T}(t_0)$  il **Versore Tangente** a un punto  $t_0, \forall t_0 \in [a, b]$  (ovvero il vettore unitario a partire dalla derivata in quel punto). A questo punto definiamo anche il **Versore Normale** ovvero  $\underline{N}(t_0)$  come il versore tangente ruotate di  $\pi/2$  in senso orario.



*Osservazione:* Se  $\tilde{\varphi}$  è parametrizzata con ascissa curvilinea, allora  $\underline{N}(s) \perp \underline{T}(s) = \tilde{\varphi}'(s) \implies \underline{N}(s) // \tilde{\varphi}''(s)$

## 5.2 Integrali di 2<sup>a</sup> specie curvilinei

Consideriamo ora un campo vettoriale  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , strutturato in questo modo:

$$(x, y, z) \mapsto \underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(\varphi) \\ F_2(\varphi) \\ F_3(\varphi) \end{pmatrix}$$

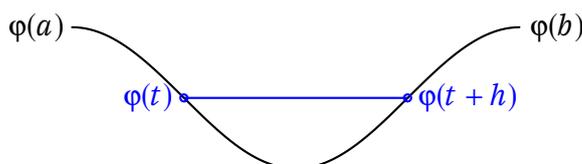
Se consideriamo poi i due punti  $\underline{x} \in A$ ,  $\underline{x}_1 = \underline{x} + \underline{h}$  allora  $\underline{x}_1 \in A$  per  $h$  abbastanza piccolo (diciamo che  $\|\underline{h}\| \approx 0$ ). A questo punto, siccome lo spostamento è infinitesimo, il lavoro del campo per spostare la particella è circa forza per spostamento, ovvero  $L \approx F(\underline{x}) \cdot \underline{h}$ .

Se poi  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è regolare (o regolare a tratti e spezzata) e ha sostegno in  $A$ , ovvero  $\varphi : [a, b] \rightarrow I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora il lavoro del campo per spostare la particella da  $\varphi(a)$  a  $\varphi(b)$  è l'integrale lungo della curva del campo moltiplicato per il versore tangente.

Questo perchè, come detto prima il lavoro è circa forza per spostamento. In questo caso però i due punti non sono più  $\underline{x}, \underline{x}_0$ , che avevamo chiamato così per semplicità, ma per come abbiamo definito la funzione i due punti saranno  $\underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t+h)$ , quindi si ha:

$$\delta L \approx F(\varphi(t)) \cdot [\varphi(t+h) - \varphi(t)]$$

A questo punto, moltiplicando per  $h/h$  otteniamo una somma che portata a limite, ci da come risultato l'integrale.



Osserviamo inoltre che per calcolare il lavoro, ricordandosi che  $\underline{T}(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \cdot \|\varphi'(t)\|$ , si può ricorrere alla già nota [Equazione 5.4](#), senza il modulo però, ovvero

$$L_\varphi = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (5.7)$$

 **Definizione 62:** Integrale curvilineo di  $2^a$  specie

Data il campo vettoriale  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  strutturato come sopra e la curva regolare  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , chiamiamo integrale curvilineo di  $2^a$  specie (o integrale del lavoro):

$$L_\varphi = \int_\varphi \underline{F} \cdot \underline{T} ds \quad (5.8)$$

Se la curva è chiusa allora l'integrale si chiama **Circuitazione** e si indica con

$$L_\varphi = \oint_\varphi \underline{F} \cdot \underline{T} ds \quad (5.9)$$

Vediamo adesso due esempi che ci fanno capire come delle volte il lavoro dipende solo dagli estremi. Il primo è il caso del campo gravitazionale, che sappiamo avere circuitazione nulla, ma nel secondo caso non è così.

 **Esempio 22:** Lavoro del Campo Gravitazionale

Il nostro campo vettoriale è:

$$\underline{F}(x, y, z) = \frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \left( \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)}, \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)}, \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right)$$

In cui  $m, M$  sono rispettivamente la massa più piccola e quella più grande. Come percorso prendiamo una curva qualsiasi  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \underline{0}$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ \varphi'(t) &= (x'(t), y'(t), z'(t)) \end{aligned}$$

A questo punto, calcolare il lavoro del percorso è facile:

$$\begin{aligned} L_\varphi &= \int_\varphi \underline{F} \cdot \underline{T} ds = \int_a^b \underline{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \\ &= GmM \cdot \int_a^b \frac{(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t))}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2}{2} dt = \\ &= GmM \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{-1/2} \right] dt = \\ L_\varphi &= GmM \cdot \left[ \frac{1}{\|\varphi(b)\|} - \frac{1}{\|\varphi(a)\|} \right] \end{aligned}$$

E ovviamente questo risultato non dipende dal percorso fatto ma solo dagli estremi di integrazione.

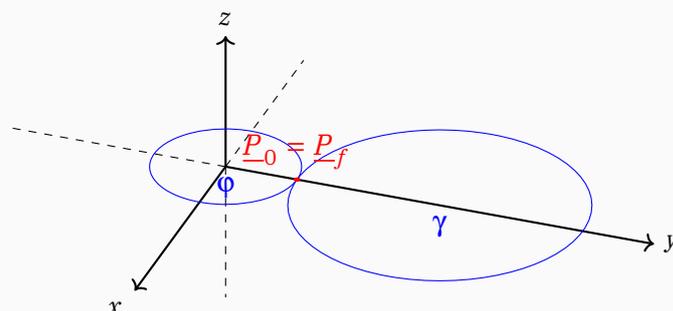
### Esempio 23

Consideriamo adesso un altro campo vettoriale

$$f(x, y, z) = (xy, y, 0)$$

E consideriamo poi due curve diverse e chiuse con stesso punto di partenza e fine per la parametrizzazione:

$$\begin{cases} \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), & t \in [0, 2\pi] \\ \gamma(t) = (2 + \cos(t), \sin(t), 0), & t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$



A questo punto, se calcoliamo il lavoro su entrambe le curve dello stesso campo otteniamo:

$$\begin{aligned} L_\varphi &= \int_0^{2\pi} (\cos(t)\sin(t), \sin(t), 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin^2(t) + \cos(t)\sin(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\gamma &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t)) dt}_{=0} = \\ &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt = -2\pi \end{aligned}$$

Quindi abbiamo due lavori diversi nonostante gli stessi punti di partenza e fine. Presto vedremo che quella appena vista in [Esempio 5.2](#) e in questo è una proprietà dei campi conservativi.

## 5.3 Forme Differenziali

Introduciamo adesso le forme lineari e la loro relazione con i campi vettoriali. Data l'applicazione lineare

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{v} &\longrightarrow \varphi[\underline{v}]\end{aligned}$$

Se questa è **Duale** in  $\mathbb{R}^n$ , ovvero se  $\varphi \in \mathbb{R}^{n*} \equiv \{\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{lineari}\} \implies \exists! \underline{F} \in \mathbb{R}^n : \varphi[\underline{v}] = \underline{F} \cdot \underline{v}$ , e questo  $\forall \underline{v} = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Considerando poi i vettori della base canonica  $e_i \in \mathbb{R}^{n*} \forall i = 1 \dots n : e_i[\underline{v}] = v_i$ , allora posso riscrivere il mio oggetto come

$$\begin{aligned}\varphi[\underline{v}] = \underline{F} \cdot \underline{v} &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot e_i[\underline{v}] \\ \varphi &= \sum_{i=1}^n F_i e_i\end{aligned}$$

Per notazione, i vettori della base canonica li esprimiamo come differenziali, ovvero

$$dx_i = e_i$$

### **Definizione 63:** 1-Forma

Sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $\omega(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  lineare, allora chiamiamo **Forma Differenziale Lineare** (o **1-Forma**) l'applicazione lineare sopracitata, che esprimiamo il più delle volte nella notazione comoda:

$$\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n F_i(\underline{x}) dx_i \quad (5.10)$$

Chiamiamo inoltre  $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  i **Coefficienti della forma differenziale**, e chiaramente  $\omega \in C^K$  se i coefficienti sono  $F_i \in C^k \forall i = 1 \dots n$

Siccome poi sappiamo fare gli integrali dei campi vettoriali lungo una curva, e in particolare sappiamo fare un generico  $\int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{v}$ , allora sapremo calcolare relativamente facilmente il lavoro fatto dal campo associato alla forma differenziale.

### Definizione 64: Integrale forma differenziale

Sia la 1-forma  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  continua con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Sia poi  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  regolare a tratti, allora l'integrale della funzione scalare  $w[\underline{t}]$  sulla curva è

$$\int_{\varphi} \omega := \int_{\varphi} \omega[\underline{t}] ds = \int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{t} ds \quad (5.11)$$

Valgono su questo integrale le seguenti proprietà

- $\int_{\varphi} (\alpha\omega + \beta\tilde{\omega}) = \alpha \int_{\varphi} \omega + \beta \int_{\varphi} \tilde{\omega}$ ;
- $\int_{\gamma \cup \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\varphi} \omega$
- $\int_{-\varphi} \omega = - \int_{\varphi} \omega$  se le curve  $-\varphi, \varphi$  sono equivalenti percorse in senso contrario.

### Definizione 65: Forma differenziale Esatta

Una forma differenziale si dice **Esatta** se  $\exists U \in C^1(A) : du = \omega$ , ovvero  $dU(\underline{x})[\underline{v}] = \omega(\underline{x})[\underline{v}] \forall \underline{x}, \underline{v}$  mappe uguali, ma per definizione  $\nabla U(\underline{x}) \cdot \underline{v} = F(\underline{x}) \cdot \underline{v}$  quindi, la forma è esatta se

$$\nabla U(\underline{x}) = F(\underline{x})$$

*Osservazione:* Se la forma è esatta e  $F = \nabla F$ , questo vuol dire che un campo continuo implica una forma esatta continua.

### Definizione 66: Primitiva

Se la 1-forma  $\omega$  è esatta con  $\omega = dU$ , allora  $U$  si dice **Primitiva** di  $\omega$

### Definizione 67: Campo Conservativo

Un campo vettoriale  $F$  si dice **Conservativo** se  $\exists U \in C^1(A) : F = \nabla U$  in  $A$ .

*Osservazione:* Chiaramente, se  $U$  è primitiva di  $\omega$  o potenziale di  $F$ , l'insieme di queste primitive sarà  $U + c, c \in \mathbb{R}$ .

**π Teorema 19:** Teorema di Caratterizzazione delle forme esatte

Sia  $\omega$  forma differenziale continua in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, allora è equivalente dire:

- $\omega$  è esatta;
- Se  $\varphi$  chiusa e regolare a tratti con sostegno in  $A \implies \oint_{\varphi} \omega = 0$ ;
- Se  $\varphi$  chiusa e regolare a tratti con sostegno poligonale in  $A \implies \oint_{\varphi} \omega = 0$ ;
- Se  $\varphi, \gamma$  regolari a tratti con sostegno in  $A$  e aventi stessi punti di definizione (i classici  $a, b$ )  $\implies \int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$ ;
- Se  $\varphi, \gamma$  regolari a tratti con sostegno poligonale in  $A$  e aventi stessi punti di definizione (i classici  $a, b$ )  $\implies \int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$ ;

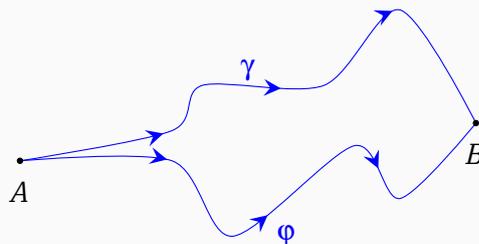
**✓ Dimostrazione 18**

Suppongo  $A$  aperto connesso (quindi lo è anche per poligonali), perchè se non lo fosse potrei comunque ragionare sulle componenti connesse. Lo schema della dimostrazione è  $I \implies II \implies III \implies V \implies I$ , inoltre  $II \implies IV \implies V$ . Chiaramente le implicazioni  $II \implies III, IV \implies V$  sono ovvie poichè semplicemente le versioni più generiche.

- $I \implies II$ : Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  regolare a tratti chiusa, ovvero  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , allora semplicemente calcolo

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds \stackrel{F=\nabla U}{=} \int_a^b \nabla U(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (U(\varphi(t))) \, dt = U(\varphi(t)) - U(\varphi(t)) = 0 \end{aligned}$$

- $II \implies IV$ : Definisco la curva che comprende entrambe  $\varphi, \gamma$  come  $\psi = \varphi \cup (-\gamma)$  poichè sono percorse nello stesso verso, quindi la curva complessiva ha bisogno di un verso unitario continuo.



✓ Dimostrazione 18 continued

A questo punto basta calcolare

$$0 = \oint_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega + \int_{-\gamma} \omega \implies \int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

- $V \implies I$ : Fisso  $\underline{x}_0 \in A$  e siccome quest'ultimo è aperto  $\exists$  poligonale di estremi  $\underline{x}_0 - \underline{x}$  che sarà il sostegno di una certa  $\varphi$  regolare a tratti. Definisco allora  $U(\underline{x}) := \int_{\varphi} \omega$ . Potrei però avere diversi sostegni e quindi diverse lunghezze. Mi serve  $U$  ben definito ovvero indipendente dalla scelta di questa curva, e  $U$  lo è poichè se  $\varphi, \tilde{\varphi}$  regolari a tratti con sostegno poligonale in  $A$  con stessi punti iniziali e finali allora per quanto detto sopra  $\int_{\varphi} \omega = \int_{\tilde{\varphi}} \omega$ . Resta solo da mostrare che  $\nabla U = F$ , questo lo si fa con il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1}(\underline{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1 + h, x_2 \dots x_n) - U(\underline{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\varphi_h} \omega - \int_{\varphi} \omega}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi_h} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F(\varphi_h(t)) \varphi_h'(t) dt = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_1(\underline{x} + t \underline{e}_1) dt = \lim_{h \rightarrow 0} F_1(\underline{x} + t \underline{e}_1) = F_1(\underline{x}) \\ \frac{\partial U}{\partial x_1}(\underline{x}) &= F_1(\underline{x}) \end{aligned}$$

Discutiamo ora la relazione che c'è tra forme chiuse e campi irrotazionali. Ricordiamoci che se una forma è di classe  $C^1$  ed è esatta, allora  $U \in C^2$  e quindi posso applicare Schwartz e le derivate miste sono uguali tra loro.

### **Definizione 68:** Forma chiusa

Una forma differenziale di classe  $C^1(A)$  si dice **Chiusa** se vale

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Questo equivale a dire che il campo è irrotazionale. Per dare questa definizione però, abbiamo bisogno di definire anche il Rotore.

### **Definizione 69:** Rotore

Sia  $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}) \dots F_n(\underline{x})) \in C^1(A)$  con  $A$  aperto, allora si dice **Rotore** di  $F$  l'oggetto:

$$\nabla \times F := \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

Ovvero, possiamo anche scriverlo come

$$\nabla \times F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (5.13)$$

Per come abbiamo definito il rotore, capiamo che la **Definizione 5.3** equivale ad avere una forma differenziale in due dimensioni ( $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) con rotore nullo, siccome se calcoliamo il rotore di una funzione del genere, tutte le derivate rispetto a  $z$  o di  $F_3$  sono 0 (perchè il rotore è tale secondo definizione a prescindere dalla dimensione in cui è definita), quindi resta solo

$$\nabla \times F = \left( 0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Quindi possiamo dare una definizione più generica di forma chiusa ora che abbiamo introdotto il rotore.

### **Definizione 70:** Campo irrotazionale

Un campo  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **Irrotazionale** se vale

$$\nabla \times F = 0$$

### **Proposizione 12**

Una forma  $\omega$  è chiusa  $\iff$  il campo associato è irrotazionale

Ma sotto quali ipotesi una forma chiusa è anche esatta? Prima di vederlo dobbiamo dare un altro paio di definizioni.

### **Definizione 71:** Insieme semplicemente connesso

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto si dice **Semplicemente connesso** se:

- $A$  è connesso;
- Ogni **Curva di Jordan** (semplice chiusa) con sostegno in  $A$  è il "bordo (non quello topologico ma di una superficie) di una superficie" con sostegno in  $A$ .

Esempi di insiemi semplicemente connessi sono palle,  $\mathbb{R}^n$  con  $n$  qualsiasi, gli aperti connessi... mentre insiemi che non rispettano tale condizioni sono quelli "bucati" (un anello, un disco...),  $\mathbb{R}^n$  privo di un punto o di una retta...

### $\pi$ Teorema 20: Teorema senza nome

Sia  $A$  aperto semplicemente connesso e  $\omega$  una 1-forma  $\in C^1(A)$ , allora

$$\omega \text{ esatta} \iff \omega \text{ chiusa}$$

### Esempio 24

Vediamo quali sono tutte le primitive di

$$\omega = (2xye^z)dx + (x^2ye^z)dy + (x^2ye^z + 1)dz$$

Abbiamo chiaramente che  $F_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  e quindi lo stesso per  $\omega$ . Inoltre la forma è chiusa e quindi anche esatta. Si vede facilmente che il rotore del campo è

$$\nabla \times F = (x^2e^z - x^2ye^z, 2xye^z - 2xye^z, 2xe^z - 2xe^z) = \underline{0}$$

Per cercare il potenziale  $U$ , siccome so che le varie derivate parziali di  $U$  devono essere uguali alle componenti della forma, quindi

$$U : \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xye^z & \longrightarrow \int 2xye^z dx = x^2ye^z \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2e^z & \longrightarrow \int x^2e^z dy = x^2ye^z \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x^2ye^z + 1 & \longrightarrow \int (x^2ye^z + 1) dz = x^2ye^z + z \end{cases}$$

Quindi è chiaro che  $U = x^2ye^z + z + c$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ . Un altro modo che abbiamo per trovare il potenziale è partire dal fatto che  $U = \int_{\varphi} \omega$ , e siccome la forma è esatta questo integrale non dipende dalla scelta della curva. Cerchiamo allora questa curva definendone altre tre in cui sostanzialmente curva per curva arriviamo al punto qualsiasi  $(x, y, z,)$  del potenziale.

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = (t, 0, 0), & t \in [0, x] \\ \varphi_2(t) = (x, t, 0), & t \in [0, y] \\ \varphi_3(t) = (x, y, t), & t \in [0, z] \end{cases}, \varphi = \bigcup_{i=1}^3 \varphi_i$$

A questo punto l'integrale è la somma degli integrali, che sappiamo fare siccome

📁 Esempio 24 continued

$$\int_{\varphi_i} \omega = \int_0^{x_i} F(\varphi_i(t)) \cdot |\varphi_i'(t)| dt, \text{ quindi:}$$

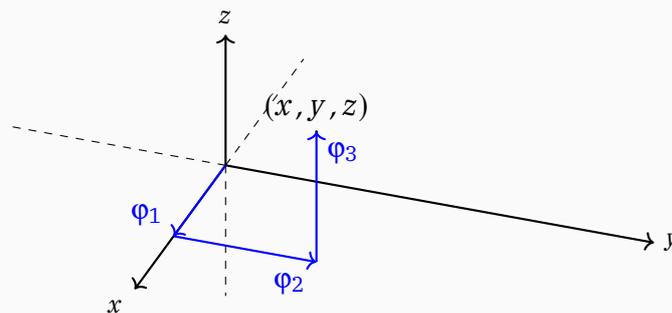
$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_0^x (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$\int_{\varphi_2} \omega = \int_0^y (2xt, x^2, x^2t + 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^y x^2 dt = x^2y + c_2$$

$$\int_{\varphi_3} \omega = \int_0^z (2xye^t, x^2e^t, x^2ye^t + 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^z (x^2ye^t + 1) dt = x^2ye^z - x^2y + z + c_3$$

E facendo la somma

$$U = \sum_{i=1}^3 \int_{\varphi_i} \omega = \cancel{x^2y} + c_2 + x^2ye^z - \cancel{x^2y} + z + c_3 = x^2ye^z + z + c$$



# 6

# Successioni e Serie di funzioni



## Sommario

- 6.1 Successioni di Funzioni, 98
- 6.2 Serie di Funzioni, 102
- 6.3 Serie di Potenze, 106

## 6.1 Successioni di Funzioni

In questo capitolo studiamo successioni di funzioni, e il modo in cui convergono o meno a determinate funzioni.

### **Definizione 72:** Successioni di funzioni

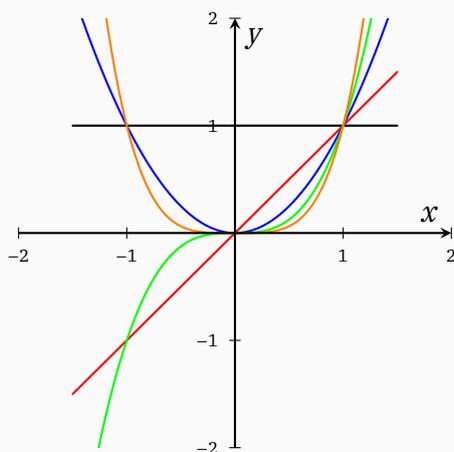
Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ , allora la successione di funzione  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  prende come input  $n \in \mathbb{N}$  e da come output una funzione in  $x$ .

### **Definizione 73:** Convergenza puntuale

La successione di funzioni  $f_n(x)$  **Converge Puntualmente** in  $I \subseteq A$  se  $\forall x \in I$  fissato, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Ovvero se a  $x$  fissato tende alla stessa funzione.

### **Esempio 25**

La successione  $f_n(x) = x^n$  non ha un'unica convergenza puntuale, infatti il limite cambia in base a come fisso  $x$ .



$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Quindi la successione tende alla funzione definita su  $(-1, 1]$  che vale 0 oppure 1:

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

### **Definizione 74:** Convergenza Uniforme

La successione  $f_n(x)$  **Converge Uniformemente** a  $f$  in  $I \subseteq \mathbb{R}$  se, fissato  $n$ , si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

La notazione per ciò è  $f_n \rightrightarrows f$ .

### **Proposizione 13**

La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non il viceversa, perchè  $|f_n - f| \leq \sup |f_n - f|$ , per ogni  $x \in I$ .

### **Teorema 21:** Teorema sulla continuità del limite

Sia  $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua t.c.  $f_n \rightrightarrows f$  in  $I \implies f$  continua in  $I$ .

### **Dimostrazione 19**

Sia  $x_0 \in I$ , vogliamo mostrare che  $f$  è continua in questo punto, quindi che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in I : |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ . Fissiamo quindi  $\varepsilon > 0$  e siccome la successione converge uniformemente in  $I$ , ho che

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in I$$

Il fatto di aver diviso per 3 non cambia nulla, ma dopo ci farà arrivare alla definizione in modo preciso che è più carino. A questo punto aggiungo e sottraggo  $f_{n_\varepsilon}$  e uso la disuguaglianza triangolare:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{< \varepsilon/3} + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| + \underbrace{|f(x_0) - f_{n_\varepsilon}(x_0)|}_{< \varepsilon/3}$$

In particolare la seconda disuguaglianza è vera anche se siamo in  $x_0$  perchè essa vale  $\forall x \in I$ , e  $x_0 \in I$ . Quindi

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)|$$

Inoltre per ipotesi le varie  $f_n$  sono continue, e a destra della nostra disuguaglianza abbiamo solo  $f_{n_\varepsilon}$ , quindi sfruttiamo questo fatto e per definizione di continuità in  $x_0$  ho che  $|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \varepsilon/3$ , quindi

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

**π Teorema 22**

Siano  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e t.c.  $f_n \Rightarrow f$  in  $[a, b]$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

**✓ Dimostrazione 20**

Per ipotesi  $f_n$  continue, quindi  $f$  continua a sua volta (**Teorema 6.1**) e quindi anche integrabile, mi serve solo che la differenza dei due integrali tra  $f_n$  e  $f$  vada a 0, e si vede in questo modo:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|}_{=\alpha} dx = \\ &= |\alpha| \cdot \left| \int_a^b 1 dx \right| \end{aligned}$$

Ovvero il Sup della differenza delle funzioni è un numero (l'intervallo è limitato e sono continue, non posso esplodere a  $\pm\infty$ ) che si trova in  $[a, b]$  ma esso non è altro che la condizione di convergenza uniforme, che è verificata per ipotesi, quindi tale Sup deve fare 0.

$$|\alpha| \cdot \left| \int_a^b 1 dx \right| = |\alpha| \cdot (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

E per il teorema del confronto:

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq |\alpha| \cdot (b - a)$$

Quindi la differenza di integrali tende a 0, ovvero essi sono uguali.

 **Esempio 26**

Per le derivate non vale lo stesso. Prendiamo ad esempio

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$$

Questa successione è t.c.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Quindi converge uniformemente in  $f_n \Rightarrow f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (e quindi anche puntualmente). Se però facciamo la derivata vediamo che

$$\frac{d(f_n(x))}{dx} = \cos(nx)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

E le due derivate non coincidono per tutte le  $x \in \mathbb{R}$ .

 **Teorema 23:** Teorema di passaggio al limite sotto segno di derivata

Il teorema il cui nome potrebbe essere usato come password del WI-FI dice che, sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n \in C^1([a, b])$  e tale che:

- $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in \mathbb{R};$
- $f_n \Rightarrow g$  in  $[a, b];$

Allora ho che  $f_n \Rightarrow f$  in  $[a, b], f' \equiv g, f \in C^1([a, b])$

## 6.2 Serie di Funzioni

Prendiamo  $\{g_k\}_k$  successione di funzioni con  $g_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### **Definizione 75:** Serie di funzioni

La **Serie di Funzioni** è la successione delle somme parziali:

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n g_k(x) \quad (6.1)$$

### **Definizione 76:** Somma della serie

Data la serie di funzioni  $s_n(x)$ , il suo **Limite puntuale**, se esiste, è la **Somma della serie**

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad (6.2)$$

Anche le serie hanno una serie di convergenze, ma queste sono molte di più e molto più incasinate delle successioni :)

Come se non bastasse, per comodità chiameremo *serie* quella che in realtà è il limite puntuale della serie, ovvero la somma.

### **Definizione 77:** Convergenza Puntuale

La serie  $s(x)$  **Converge Puntualmente** in  $J \subseteq I$  se  $\forall x \in J \implies \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) < +\infty$

### **Definizione 78:** Convergenza Assoluta

La serie  $s(x)$  **Converge Assolutamente** in  $J \subseteq I$  se  $\forall x \in J \implies \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k(x)| < +\infty$

### **Definizione 79:** Convergenza Uniforme

La serie  $s(x)$  **Converge Uniformemente** se  $s_n \rightrightarrows s$ , cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} \left| \underbrace{\sum_{k=0}^n g_k(x)}_{s_n(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)}_{s(x)} \right| = 0$$

Ovvero, leggermente diverso dalle successioni, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| = 0$$

### **Definizione 80:** Convergenza Totale

La serie  $s(x)$  **Converge Totalmente** in  $J \subseteq I$  se, posto  $M_k := \sup_{x \in J} |g_k(x)|$ , allora la serie sugli  $M_k$  converge, ovvero

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_k < +\infty$$

### **Teorema 24:** Criterio di Cauchy uniforme

Sia  $g_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J \subseteq I$  allora la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$  converge uniformemente in

$$J \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sup_{x \in J} \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+p} g_k(x) \right| < \varepsilon, \forall \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon \\ p \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

**π Teorema 25:** Teorema A

La convergenza totale implica la convergenza uniforme nello stesso insieme  $J$ .

**✓ Dimostrazione 21**

Vogliamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| = 0$ , ovvero che  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$\sup_{x \in J} \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+p} g_k(x) \right| < \varepsilon, \forall \frac{n \geq n_\varepsilon}{p \in \mathbb{N}}$ , altro non è che il criterio di Cauchy. Fissato allora

$\varepsilon > 0 \implies \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ . Questo per la convergenza

totale (**Definizione 6.2**): siccome la serie sugli  $M_k$  converge per ipotesi, la sua "coda"  $\sum_{k \geq n+1} M_k \rightarrow 0$ , questo si può dimostrare ma molto banalmente se una serie converge è chiaro che i termini che vanno all'infinito da un certo  $n$  in poi dovranno tendere a 0 (basti pensare alla serie su  $1/2^n$ ). Sia poi  $p \geq 1$ , a questo punto

$$\sup_{x \in J} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \right| \underset{\text{Dis. Triang.}}{\leq} \sup_{x \in J} \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k < \varepsilon$$

In particolare abbiamo usato il fatto che  $M_k$  è definito come  $M_k := \sup_{x \in J} |g_k(x)|$  e quanto detto sopra per la convergenza della serie.

**π Teorema 26:** Continuità serie

Se le  $g_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue e la serie  $s(x) = \sum g_k(x)$  converge uniformemente in  $I \implies$  la somma della serie è continua in  $I$ . Implicitamente stiamo affermando che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} g_k(x) \quad (6.3)$$

**π Teorema 27:** Teorema di Integrazione per serie

Siano  $g_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e sia la serie relativa convergente uniformemente in  $[a, b]$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n g_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) dx \quad (6.4)$$

### Esempio 27

Prendiamo come esempio pratico la serie:

$$s(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{x}{x^4 + 3k^2}, \quad x \in [0, +\infty[ \quad =J$$

Per la convergenza puntuale opero come per le successioni, fisso un  $x \in J$  qualsiasi, e studio la convergenza sul parametro  $k$ :

$$s(x) = \overset{x \text{ fissato}}{\downarrow} x \cdot \sum_{k \geq 1} \underbrace{\frac{1}{x^4 + 3k^2}}_{=a_k} < +\infty$$

Questa serie converge perchè è asintotica a  $1/k^2$ , e avendo lo stesso comportamento sappiamo che la serie  $\sum 1/k^2$  converge, questa farà lo stesso. Questo vale per qualsiasi  $x$  fissato che non cambia il risultato (a maggior ragione per 0, siccome si annulla tutto e fa 0, quindi converge).

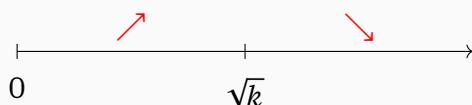
Per la convergenza uniforme invece possiamo vedere direttamente se c'è quella totale siccome la seconda implica la prima:

$$M_k = \sup_{x \in J} \left( \frac{x}{x^4 + 3k^2} \right) = g_k(\sqrt{k}) = \frac{\sqrt{k}}{4k^2} = \frac{1}{4k^{3/2}}$$

Per trovare il sup abbiamo definito una funzione  $h(x) := \frac{x}{x^4 + 3k^2}$  e studiando il segno della derivata, quindi la crescita, siamo in grado di definire dove questa assume il valore massimo. Derivando la funzione (RISPETTO A X) infatti abbiamo

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{-3x^4 + 3k^2}{x^4 + 3k^2} > 0 \iff x < \sqrt{k}$$

Quindi lo studio della crescita della funzione è:



Siccome poi la serie degli  $M_k$  converge, perchè abbiamo una serie armonica con  $a_k = 1/q^\alpha$  con  $\alpha < 1$ , allora

$$\sum_{k \geq 1} M_k < +\infty \implies \boxed{\text{Convergenza Totale}}$$

## 6.3 Serie di Potenze

### Definizione 81

Una serie di Potenze è una particolare serie numerica del tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (y - y_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$$

Detta di centro  $y_0$ . Siccome però basta operare un cambio di variabile e porre  $x = y - y_0$ , in genere si studia solo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad (6.5)$$

### Proposizione 14

Se la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  converge in  $\xi \neq 0$ , allora:

- Converge assolutamente in  $(-|\xi|, |\xi|)$ ;
- Converge totalmente in  $[-\eta, \eta]$ ,  $\forall \eta \in (0, |\xi|)$

### Dimostrazione 22

Dimostriamo i punti in ordine:

1°: Sia  $x \in (-|\xi|, |\xi|)$ . Siccome la serie converge in  $\xi$ , allora la successione relativa  $a_k \xi^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ , per condizione sufficiente (visto in Analisi I). Questo vuol dire che  $\exists M > 0 : |a_k \xi^k| \leq M \forall k$ . Ne segue che,  $\forall x \in (-|\xi|, |\xi|)$  (quello definito all'inizio), vale:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{|a_k| |x|^k}_{\leq M} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{|a_k| |\xi|^k}_{\leq M} \cdot \frac{|x|^k}{|\xi|^k} \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{\xi} \right|^k < +\infty$$

Questa serie converge perchè  $\left| \frac{x}{\xi} \right| \in [0, 1)$ , e quindi abbiamo convergenza assoluta in  $x$ , valendo questo  $\forall x \in (-|\xi|, |\xi|)$ , vale su tutto l'intervallo;

2°: Fissato  $\eta \in (0, |\xi|)$ , considero per la convergenza totale

$$M_k := \sup_{x \in [-\eta, \eta]} |a_k x^k| = |a_k| \cdot \eta^k$$

Questo si può fare con la derivata, ma banalmente ho  $|a_k| |x|^k$  e la potenza è

✓ Dimostrazione 22 continued

una funzione monotona crescente, quindi basta pensare che  $x$  assume valore massimo in  $\eta$  siccome l'intervallo è  $[-\eta, \eta]$  e quindi il sup è semplicemente  $\eta^k$ . A questo punto la serie degli  $M_k$  converge perchè è una serie di potenza con parametro nell'insieme  $\eta \in (0, |\xi|)$ , e in questo insieme la serie converge assolutamente per quanto detto al punto precedente.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_k = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot \eta^k < +\infty$$

Osserviamo che gli insiemi di convergenza sono sempre simmetrici rispetto a 0 perchè dipendono da  $|x|$ .

π **Proposizione 15**

Se la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  non converge puntualmente in  $\xi \neq 0$ , allora essa non converge puntualmente in  $\mathbb{R} \setminus (-|\xi|, |\xi|)$ .

✓ **Dimostrazione 23**

La dimostrazione è banale. Se esistesse un  $x : |x| > |\xi|$  tale che la serie converge in questo  $x$ , allora essa convergerebbe in  $(-|x|, |x|)$ , ma  $(-|\xi|, |\xi|) \subseteq (-|x|, |x|)$ , che è assurdo.

La morale è che l'insieme di convergenza deve essere connesso, quindi senza buchi, e simmetrico. Posso allora definire un "raggio" entro cui far convergere la serie.

☰ **Definizione 82:** Raggio di convergenza

Sia la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  convergente puntualmente in  $A \neq \emptyset$  (poichè  $0 \in A$  in ogni caso). Allora definisco il **Raggio di convergenza** come:

$$\rho := \sup \{x | x \in A\} \quad (6.6)$$

Determiniamo il raggio di convergenza con una serie di criteri.

**$\pi$  Teorema 28:** Criterio della Radice

Se  $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =: l$ , allora il raggio di convergenza è

$$\rho = \frac{1}{l}$$

 **$\pi$  Teorema 29:** Criterio del rapporto

Se  $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} =: l$ , allora il raggio di convergenza è

$$\rho = \frac{1}{l}$$

 **$\pi$  Teorema 30:** Teorema di Abel

Se la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  ha raggio di convergenza  $\rho > 0$  e la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k$  converge, allora la serie di partenza converge uniformemente in  $[-\rho + \delta, \rho]$  (oppure facendo la serie su  $(-\rho)^k$  l'intervallo di convergenza è  $[-\rho, \rho - \delta]$ ).

Quindi se le serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\pm \rho)^k$  convergono, ho convergenza uniforme in  $[-\rho, \rho]$ .

 **$\equiv$  Definizione 83:** Serie derivata

Sia la serie di potenze  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ , allora la **Serie derivata** è definita come

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

### π Teorema 31

La serie di potenze  $s(x)$  e la sua serie derivata  $s'(x)$  hanno stesso raggio di convergenza.

### ✓ Dimostrazione 24

Nel caso in cui esista il limite del criterio della radice, ovvero  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$ , per quello della serie derivata ho che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k \cdot a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[k]{|k|}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{|a_k|}}_{\rightarrow 1/\rho} = \frac{1}{\rho}$$

### π Teorema 32: Teorema di derivazione/Integrazione

Se la serie di potenze  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  ha raggio di convergenza  $\rho \neq 0$  valgono le seguenti:

•  $s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} \left( = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right)$ . Il che non è scontato, infatti la serie di potenze è definita come in **Definizione 6.3**, ovvero una particolare serie di funzioni;

•  $\int_a^b \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \int_a^b a_k x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}, \quad \forall x \in (-\rho, \rho)$

### ✓ Dimostrazione 25

Anche qui dimostriamo per punti:

1°: Considero  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  successione. In particolare  $s_n(0) = a_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_0 \in \mathbb{R}$ .

Secondo poi il **Teorema 6.1** aggiungendo l'ipotesi che

$$s'_n \Rightarrow \underbrace{\sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}}_{=g(x)}$$

In  $[-\rho + \delta, \rho - \delta]$ , allora per tesi dello stesso teorema  $s'(x) \equiv g(x)$ ;

✓ Dimostrazione 25 continued

2°: Per il secondo punto considero dapprima

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n a_k t^k dt \right)}_{=s_n(t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( \int_0^x a_k t^k dt \right)$$

Questo è vero perchè l'integrale di somme è la somma di integrali (non necessariamente vero per somme infinite, ma sempre vero per quelle finite per le proprietà degli integrali). A questo punto faccio l'integrale e fisso  $x \in (-\rho, \rho)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

### Esempio 28

Prendiamo la serie

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$$

E calcoliamo  $s(x)$  nell'insieme di convergenza puntuale. Notiamo che il raggio di convergenza è banalmente

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1 \implies \text{C.P. in } (-1, 1)$$

Controllando gli estremi (non sono *inclusi* nel calcolo del raggio di convergenza):

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1^k}{k} = +\infty$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{-1^k}{k} < +\infty \text{ per Leibniz}$$

Quindi la convergenza puntuale si ha in  $[-1, 1)$ . A questo punto per calcolare  $s(x)$  uso il [Teorema 6.3](#) siccome

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} &= \sum_{k \geq 1} \left( \int_0^x t^{k-1} dt \right) = \int_0^x \left( \sum_{k \geq 1} t^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^x \left( \sum_{j \geq 0} t^j \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln |1-t| \Big|_0^x = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

 Esempio 28 continued

La cosa interessante da osservare è che siamo giunti al risultato

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in [-1, 1)$$

Ma questo è proprio Taylor centrato in 0. Infatti facendo le prime derivate di  $\ln(1-x)$  vediamo come

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{1-x} & f''(x) &= -\frac{1}{(1-x)^2} \\ f'''(x) &= -\frac{2}{(1-x)^3} & f''''(x) &= -\frac{6}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Quindi andando avanti la regola generica è che

$$f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus 0 \implies f^{(k)}(0) = -(k-1)!$$

Ora seguendo la formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-(k-1)!x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-(k-1)\cancel{k!}x^k}{\cancel{k!}} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{x^k}{k}$$

Questo non è banale, poichè abbiamo scoperto un legame tra un certo tipo di serie, e abbiamo visto come la formula di Taylor valga solo per un intorno del punto, e in questo caso siamo stati anche in grado di calcolarne il preciso intervallo.

In [questa animazione](#) la somma è sovrapposta alla funzione e si vede chiaramente come e perchè l'approssimazione di Taylor valga solo nell'intervallo che abbiamo definito, in particolare perchè -1 non è incluso.

 **Definizione 84:** Serie di Taylor

Sia  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f \in C^\infty(I)$  se vale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Allora  $f$  si dice **Analitica** o **Sviluppabile in serie di Taylor**.

# 7 Insiemi numerabili e proprietà



## Sommario

- 7.1 Teoremi di Passaggio al limite, 113
- 7.2 Teorema e spazio di Lebesgue, 114

Tutta la parte facoltativa viene saltata per questioni di tempistiche, e perchè essa è appunto facoltativa. Ma maggiormente perchè sono presenti le slide, e riscrivere le stesse cose non ha il minimo senso. Molte delle cose trattate sono tuttavia essenziali per contestualizzare cose fatte in questo capitolo.

## 7.1 Teoremi di Passaggio al limite

### **Definizione 85:** Quasi Ovunque

Una proprietà o una proposizione generica  $\mathcal{P}$  vale **Quasi Ovunque** (notazione *q.o.*) in un insieme  $E$  se, posto  $Y = \{x \in E \mid \mathcal{P} \text{ è falsa} \}$  è t.c.  $m(Y) = 0$ .

### **Teorema 33:** Teorema della Convergenza monotona

Sia  $\{f_n\}_n$  successione di funzioni su un insieme  $E$  misurabile e tale che:

- $0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x)$  *q.o.* in  $E$ ;
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  *q.o.* in  $E$ .

Allora vale che

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

### **Corollario 3**

Sia la successione  $\{g_k\}$  di funzioni  $g_i \geq 0$  su  $E$  misurabile, e sia  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ , allora allo stesso modo

$$\int_E s(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_E g_k(x) dx$$

## 7.2 Teorema e spazio di Lebesgue

### $\pi$ Teorema 34: Teorema di Lebesgue/della convergenza dominata

Sia  $E$  insieme misurabile,  $\{f_n\}$  sommabili in  $E$  e  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile, tale che

- $|f_n(x)| \leq h(x) q.o. \text{ in } E$ ;
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) q.o. \text{ in } E$ ;

Allora  $f$  è sommabile in  $E$  e vale

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

### Esempio 29

La successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}]; \\ 2 - nx & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]; \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1]; \end{cases}$$

È conforme al teorema, poichè  $|f_n(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 1] = E$ , inoltre  $f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 0$  poichè in tutti e tre i casi il limite è 0. Quindi posso passare all'integrale e ottengo che

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$$

### $\pi$ Corollario 4

Sia  $E$  insieme numerabile di misura finita, sia  $\{f_n\}$  successione di funzioni sommabili in  $E$  tali che

- $|f_n(x)| \leq M q.o. \text{ in } E$ ;
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) q.o. \text{ in } E$ ;

Allora  $f$  è sommabile e vale

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

 **Definizione 86:** Spazi di Lebesgue

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  misurabile e  $p \geq 1$ . Lo spazio di Lebesgue è definito come

$$L^p(E) := \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_E |f(x)|^p dx < +\infty \right\} \quad (7.1)$$

Negli spazi di Lebesgue la norma è definita come

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (7.2)$$

Lo spazio di Lebesgue di parametro  $p$  (e quindi norma) infinito sarà similmente

$$L^\infty(E) := \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \exists k > 0 : |f(x)| < k \text{ q.o. in } E \right\}$$

E la norma è invece

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \|f\|_\infty = \text{esssup}_{x \in E} |f(x)| = \inf \{ k > 0 \mid |f(x)| < k \text{ q.o. in } E \}$$

# 8

# Superfici, Integrali



## Sommario

- 8.1 Integrazione in più dimensioni e Domini, 117
- 8.2 Cambiamento di variabile, sistemi di coordinate, 121
- 8.3 Superfici, 124
- 8.4 Integrali Superficiali, 135
- 8.5 Integrali Tripli, 136
- 8.6 Superfici Orientabili, 141
- 8.7 Teorema di Stokes e Domini lacunosi, 150
- 8.8 Bordi Superficie, di nuovo Stokes, 154

In questo capitolo è riassunto tutto ciò che riguarda superfici, integrali doppi, tripli, domini... siccome questi argomenti sono strettamente connessi tra loro.

## 8.1 Integrazione in più dimensioni e Domini

### $\pi$ Teorema 35: Teorema di Fubini

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile, allora valgono:

- $y \mapsto f(x, y)$  è sommabile in  $\mathbb{R}$  q.o. per  $x \in \mathbb{R}$ ;
- $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$  è sommabile in  $\mathbb{R}$ ;
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$

Questo non è un teorema banale. Ci assicura di poter fare un integrale doppio "separando" in un certo senso le variabili, ovvero risolvendo prima una variabile e poi integrando il risultato rispetto all'altra. Il teorema vale ancora scambiando le variabili.

### $\pi$ Teorema 36: Teorema di Tonelli

Sia  $f \geq 0, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile, se uno dei seguenti tre integrali esiste:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \quad \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

Allora esistono tutti e tre ed essi coincidono.

La notazione per l'integrazione su insiemi di dimensione maggiore a 1 può variare, perchè ci piace confonderci le idee. Per insiemi  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  possiamo avere in modo equivalente

$$\int_E f(x, y) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy$$

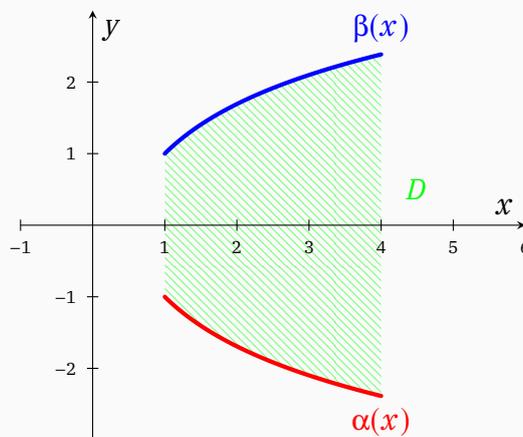
Similmente, per insiemi del tipo  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  avremo

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

**Definizione 87:** Dominio  $x$ -Normale

Sia l'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ , Con  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e t.c.  $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a, b]$ .

Se  $\alpha, \beta \in C^1([a, b])$  allora  $D$  è detto **Dominio  $x$ -Normale Regolare**.



Come faccio però a integrare in  $D$ ? Mi serve ovviamente una funzione sommabile, basta avere  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , siccome entrambe le variabili sono limitate e il dominio è intersezione di chiusi, esso è compatto. Arriviamo alla formula di Integrazione (o riduzione dei domini  $x$ -Normali).

Per farlo, sappiamo per certo che l'integrale è minore di infinito, quindi

$$+\infty > \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \chi_D(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_D(x, y) dy \right) dx$$

L'ultima uguaglianza deriva dal **Teorema 8.1** e dal fatto che  $\chi_D$  è sommabile. Essa inoltre è 0 fuori da  $D$ . Questo vuol dire che  $f \chi_D = 0 \forall x \notin [a, b]$ , allora l'integrale diventa

$$\int_a^b \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_D(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

E la seconda disuguaglianza deriva dallo stesso ragionamento fatto prima. Se  $f$  è fuori da  $[\alpha(x), \beta(x)]$  allora la funzione è 0. Possiamo poi togliere  $\chi_D$  perchè è identicamente uguale a 1 in tutto  $D$  (è proprio quello il senso della funzione caratteristica).

**Definizione 88:** Formula di Integrazione per domini  $x$ -Normali

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (8.1)$$

**Definizione 89:** Dominio  $y$ -Normale

Similmente a quanto detto prima, il dominio si dice  **$y$ -Normale** se:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \right\}$$

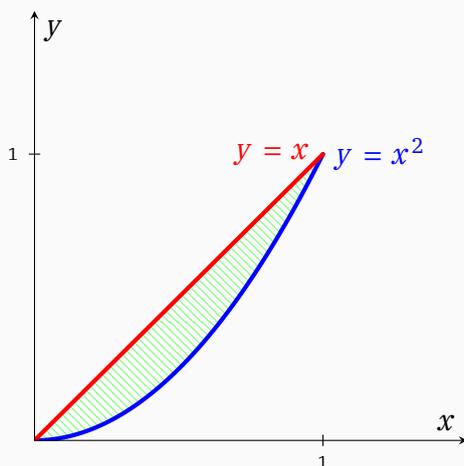
Con  $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e  $\gamma \leq \delta$  in  $[c, d]$ . se  $\gamma, \delta \in C^1$  allora il dominio si dice **Dominio  $y$ -Normale Regolare**.

**Definizione 90:** Formula di Integrazione per domini  $y$ -Normali

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (8.2)$$

**Esempio 30**

$D$  è la regione definita dalle intersezioni delle funzioni  $y = x^2$  e  $y = x$  compresa nel primo quadrante. Calcolare l'integrale doppio della funzione  $f(x, y) = 2x + 3y$  su  $D$ .



Questo si può fare anche con un integrale unidimensionale volendo, ma sarebbe abbastanza complicato e non è lo scopo al momento. In questo caso  $D$  è normale per entrambi le variabili. Identifichiamo le quattro funzioni quindi:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x^2 & \beta(x) &= x \\ \gamma(y) &= y & \delta(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

Adesso facciamo prima l'integrale rispetto alla normalità su  $x$ :

📄 Esempio 30 continued

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (2x + 3y) dy dx = \int_0^1 2xy + \frac{3y^2}{2} \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{7x^2}{2} - 2x^3 - \frac{3x^4}{2} \right) dx = \frac{11}{30}\end{aligned}$$

E poi rispetto alla normalità su  $y$  (ovviamente ci aspettiamo lo stesso risultato):

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (2x + 3y) dx dy = \int_0^1 x^2 + 3xy \frac{3y^2}{2} \Big|_y^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 (3y^{3/2} - 4y^2 + y) dt = \frac{11}{30}\end{aligned}$$

### 📖 Definizione 91: Dominio Regolare

Diciamo che  $D$  è **Dominio Regolare** se è unione di un numero finito di domini normali regolari con interno disgiunto.

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

In tal caso la formula di integrazione o riduzione diventa

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \left( \int_{D_i} f(x, y) dx dy \right)$$

*Osservazione:* Se  $D$  è dominio regolare, allora  $\partial D$  è unione di un numero finito di sostegni di curve regolari (perchè esso è composto da tratti di curve cartesiane). Quindi  $\partial D$  è sostegno di curve regolari a tratti.

## 8.2 Cambiamento di variabile, sistemi di coordinate

Siccome spesso può essere difficile capire gli estremi di integrazione, è utile sapere come facciamo a cambiare da un sistema di coordinate a un altro operando una trasformazione (per esempio le coordinate sferiche e cilindriche che vengono usate sempre).

Sappiamo già per un integrale unidimensionale che

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx \stackrel{x=\phi(u)}{=} \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du$$

Ora vogliamo estenderla. Ci sembra chiaro che con funzioni in più variabili quello che cambierà sarà la derivata che diventa gradiente o Jacobiano (in base alla dimensione).

### $\pi$ Teorema 37: Cambiamento di variabile negli integrali

Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e sia  $\phi : A \rightarrow B$  differenziabile (cioè di classe  $C^1$  e tale che  $\phi, \phi^{-1}$  siano invertibili). Sia poi  $E \subseteq B$  misurabile e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile in  $E$ , allora:

$$\int_E f(\underline{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(\underline{u})) \cdot |\det \phi(\underline{u})| du_1 \dots du_n \quad (8.3)$$

Il cambiamento di variabile più comune è quello delle coordinate polari. Calcoliamo il determinante dello Jacobiano siccome viene usato spessissimo:

$$\phi(\rho, \theta) : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

In questo caso basta calcolare

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho$$

**Definizione 92:** Area Insieme

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  misurabile, allora la sua **Area** è

$$\text{Area}(D) := m_2(D) = \iint_D 1 dx dy$$

Approfittiamone per ridare ancora una volta la definizione di Massa, Baricentro, e Momento di Inerzia (spoiler: non è l'ultima).

**Definizione 93:** Massa, Baricentro, Momento di Inerzia di Domini Piani

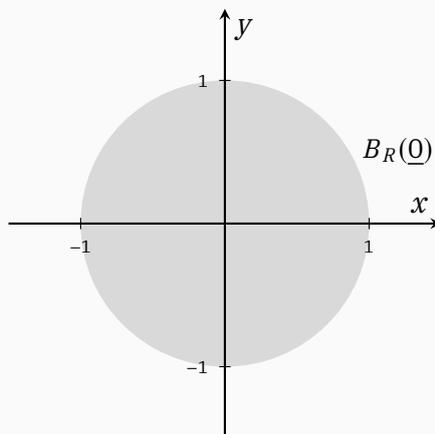
Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  misurabile e sia  $\mu : D \rightarrow [0, +\infty)$  la funzione densità di massa. Allora definiamo:

- **Massa:**  $M := \iint_D \mu(x, y) dx dy$ . Quindi un insieme con densità di massa pari a 1 ha Massa uguale all'Area;
- **Baricentro:** detto anche **Centro di Massa**, formato da due componenti del tipo  $x_B = \frac{1}{M} \iint_D x \cdot \mu(x, y) dx dy$  e lo stesso per  $y$  con variabile invertita;
- **Momento di Inerzia:**  $I_C := \iint_D d^2((x, y), r) \mu(x, y) dx dy$  con  $d$  distanza del punto dalla retta  $r$ .

**Esempio 31:** Area del cerchio

Verifichiamo la conosciuta area del cerchio per testare la nostra formula. Il nostro insieme è

$$B_R(\underline{0}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2 \right\}$$



📄 Esempio 31 continued

Parametizziamo l'insieme con coordinate polari e otteniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho \in [0, R] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

A questo punto svolgiamo l'integrale

$$\iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{R^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{R^2} = 2 \frac{\pi R^2}{2} = \boxed{\pi R^2}$$

### 📖 **Definizione 94:** Coordinate Ellittiche

Parametizziamo un insieme ellittico con

$$E := \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Quindi le coordinate ellittiche sono date dalla funzione

$$\phi : \begin{cases} x = a\rho \cos(\theta) \\ y = b\rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, \theta_1] \end{cases} \quad (8.4)$$

## 8.3 Superfici

### **Definizione 95:** Superficie

Diciamo che  $r : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (con  $K$  chiusura di un aperto connesso) è **Superficie Regolare** se valgono le seguenti:

- $r \in C^1(K)$ ;
- $rg(J(r)) = \max = 2$ ;
- $r$  iniettiva in  $k$

Notiamo che chiediamo  $K$  come chiusura di un aperto connesso per evitare cose che non siamo in grado di gestire proprio bene. Confondiamo poi superficie (che è la mappa) con sostegno (che è quella che visualizziamo come immagine su  $\mathbb{R}^3$ ).

### **Definizione 96:** Sostegno

Il sostegno di una superficie è  $\Sigma := r(k)$

La forma base di una superficie cartesiana è

$$\begin{cases} x = r_1(u, v) \\ y = r_2(u, v) \\ z = r_3(u, v) \end{cases}$$

In genere però, si considerano per facilità le prime due variabili uguali a se stesse (perchè esprimiamo le funzioni sul piano come  $z = f(x, y)$ ). Verifichiamo se questa parametrizzazione è regolare seguendo le condizioni della [Definizione 8.3](#).

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

In cui però necessariamente  $f : K \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(k)$ . La prima condizione è soddisfatta, siccome  $r_i \in C^1 \forall i$ , quindi bisogna vedere le derivate. Chiedere che il Jacobiano abbia rango massimo è come chiedere che abbia le colonne linearmente indipendenti, e siccome

$$\underline{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Sono sempre linearmente indipendenti, stiamo apposto. Anche l'iniettività è verificata.

**π** **Proposizione 16**

Una Superficie regolare è **Localmente Cartesiana**

Questo equivale a dire che  $\Sigma$  è localmente il grafico di una funzione in due variabili, infatti in questo tipo di parametrizzazione abbiamo  $x, y, f(x, y)$ .

**✓** **Dimostrazione 26**

La superficie è regolare, quindi preso  $(u_0, v_0) \in K$  abbiamo il rango massimo, cioè

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \partial_u r_1 & \partial_v r_1 \\ \partial_u r_2 & \partial_v r_2 \\ \partial_u r_3 & \partial_v r_3 \end{pmatrix} (u_0, v_0) = 2$$

Che si può esprimere dicendo che almeno uno dei **minori** è invertibile. Supponiamo quindi che lo sia il primo. Adesso vogliamo fare come in passato con Dini.

Definiamo una funzione del tipo

$$\begin{aligned} \psi : K &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1 \\ (u, v) &\longrightarrow \underline{\psi}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v)) \end{aligned}$$

Questa è di classe  $C^1$  poichè lo è anche  $r$ . Il Jacobiano di questa funzione è il primo minore, che come detto prima è invertibile. Ora abbiamo le ipotesi per usare il **Teorema 4.3**:

$$\exists \begin{matrix} I \text{ di } \underline{\psi}(u_0, v_0) \\ J \text{ di } (u_0, v_0) \end{matrix} : \psi : J \longrightarrow I \text{ è invertibile}$$

In cui inoltre  $\psi^{-1} : I \longrightarrow J \in C^1$ . Chiamo quindi  $(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$  per comodità e voglio adesso una nuova superficie  $r \circ \psi^{-1}$ .

La costruisco ponendo  $r \circ \psi^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  in cui

$$(x, y) \longrightarrow \underline{r}(\psi^{-1}(x, y)) = \begin{pmatrix} r_1(\psi^{-1}(x, y)) \\ r_2(\psi^{-1}(x, y)) \\ r_3(\psi^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r_3 \circ \psi^{-1}(x, y) \end{pmatrix}$$

In particolare nell'ultimo passaggio abbiamo usato che, per come abbiamo definito la funzione  $\psi$  si ha  $\underline{\psi} = (r_1, r_2)$  quindi chiaramente  $r(\psi^{-1}(x, y)) = \psi(\psi^{-1}(x, y)) = (x, y)$ , ma solo per le prime due componenti. Abbiamo dato quindi una nuova parametrizzazione di  $\Sigma$ , del tipo  $x, y, f(x, y)$  dimostrando la tesi.

### 8.3.1 Linee Coordinate e Piano tangente

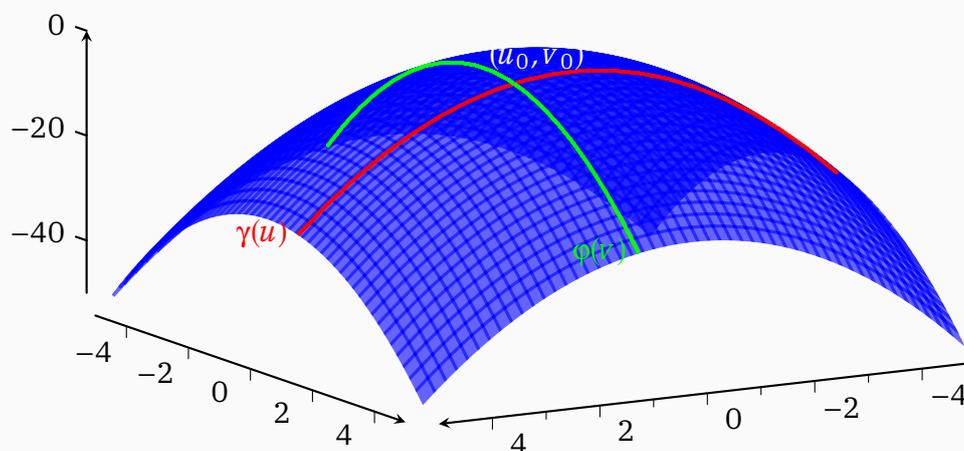
Possiamo pensare a una superficie come ad un insieme di curve. Infatti se considero sul dominio un punto  $u_0, v_0$  per esso passeranno due curve  $\gamma(u), \phi(v)$ . Fissando un punto e facendo variare l'altro trovo quindi questa curva.

#### **Definizione 97:** Linee Coordinate

Data la Superficie  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e il punto  $(u_0, v_0) \in k$  individuo per esso due curve al variare di una delle due variabili, queste si chiamano **Linee Coordinate**.

$$\underline{\gamma}(u) = \underline{r}(u, v_0) \quad (8.5)$$

$$\underline{\phi}(v) = \underline{r}(u_0, v) \quad (8.6)$$

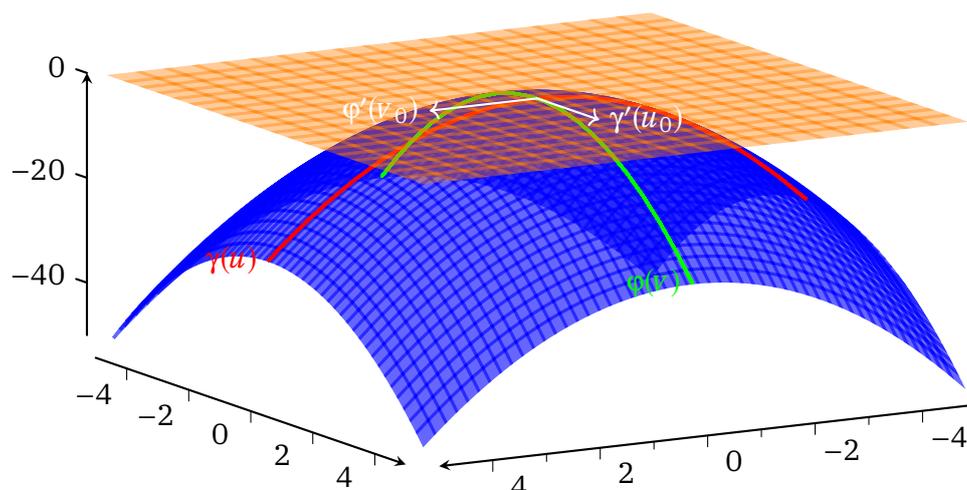


Nel caso della sfera queste linee sono dette comunemente **Paralleli, Meridiani**. Per la costruzione del piano tangente, troviamo i vettori tangenti alle due curve che costituiscono le linee coordinate, e costruiamo un piano usando quei due vettori come base.

Quindi siccome la derivata di queste curve equivale al vettore derivata della superficie rispetto alla variabile, ovvero  $\underline{\gamma}'(u_0) = \underline{r}_u(u_0, v_0)$  (perchè la curva in sè non è altro che la mappa della superficie ma con un parametro fissato) otteniamo:

$$\underline{\gamma}'(u_0) = \underline{r}_u(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}'(v_0) = \underline{r}_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

Questi vettori sono quindi linearmente indipendenti e generano il piano tangente nel punto  $\underline{P}_0 = \underline{r}(u_0, v_0)$



Per trovare l'equazione prendo un punto e mi assicuro che sia nel piano, ovvero, con  $\underline{P}_0 = \underline{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\pi_{\underline{P}_0} = \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 0$$

Noi però conosciamo già l'equazione del piano tangente di una funzione in tre variabili, quindi verifichiamo che quanto appena detto sia coerente con una parametrizzazione standard  $x, y, f(x, y)$ :

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = (x - x_0) \left[ -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] - \left[ (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - (z - z_0) \right]$$

$$0 = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \underbrace{z}_{f(x,y)} - \underbrace{z_0}_{f(x_0, y_0)}$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

### Definizione 98: Piano tangente

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare, allora il suo piano tangente in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  è:

$$\pi_{P_0} = \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 0 \quad (8.7)$$

Con questa logica, non siamo solo in grado di vedere i versori tangenti alla superficie in un punto, ma anche quelli ortogonali.

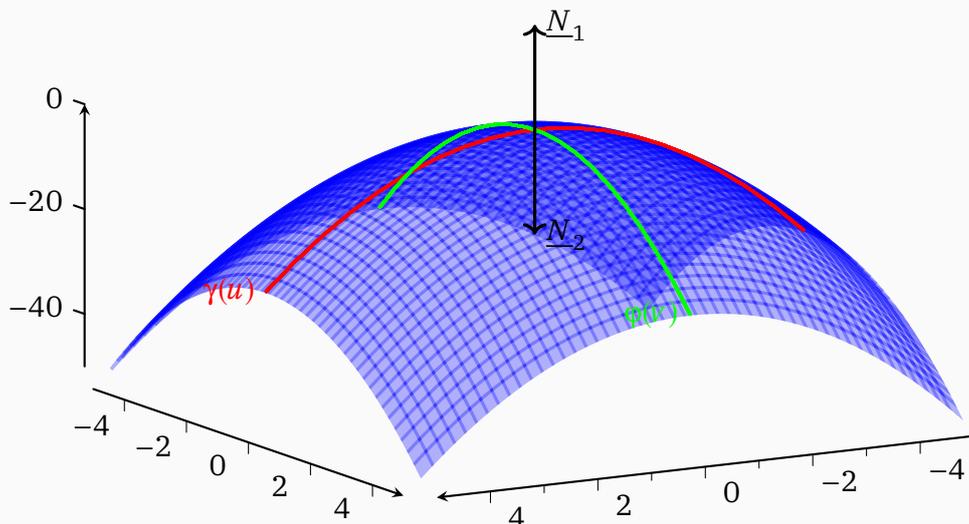
### Definizione 99: Versore Normale

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare, allora il vettore ortogonale a  $\Sigma$  in un punto  $\underline{r}(u_0, v_0)$  si chiama **Versore Normale** ed è

$$\underline{N}_1 = \frac{\underline{r}_u(u, v) \wedge \underline{r}_v(u, v)}{\|\underline{r}_u(u, v) \wedge \underline{r}_v(u, v)\|} \quad (8.8)$$

Mentre l'altro versore normale (che punta dalla direzione opposta) è  $N_2 = -N_1$ . Il prodotto tra vettori è:

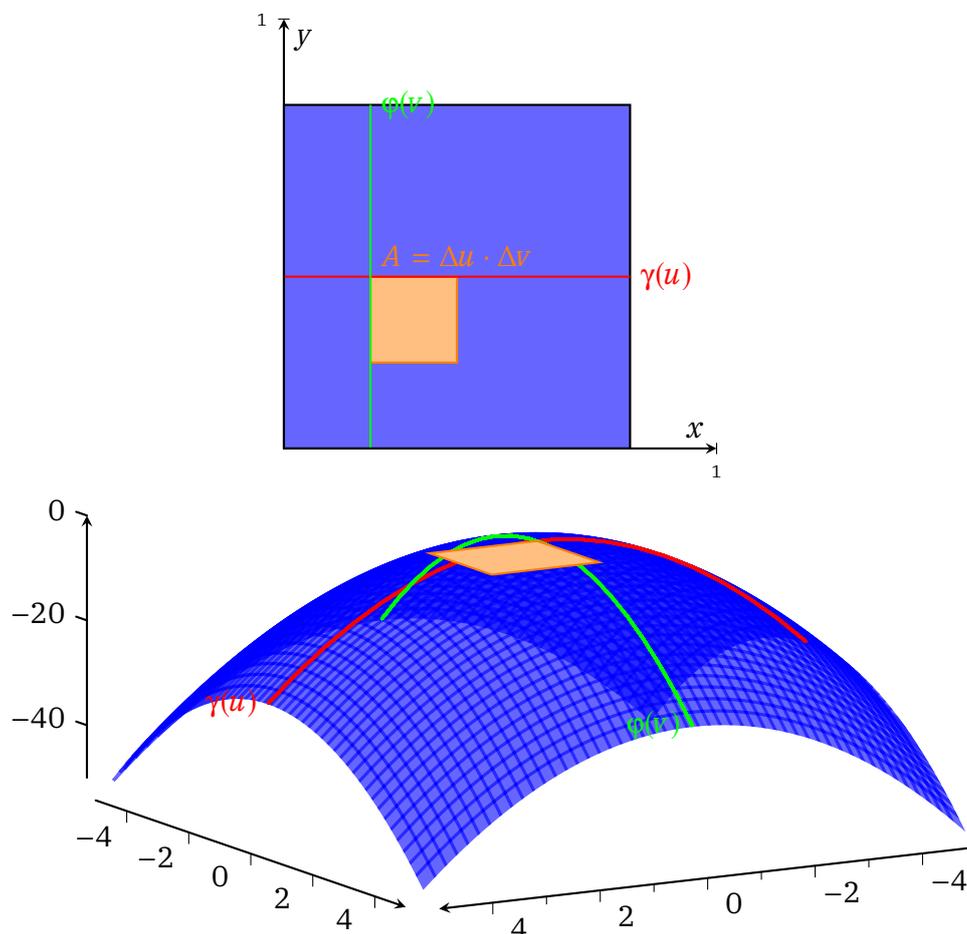
$$\underline{r}_u(u, v) \wedge \underline{r}_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_{u_1}(u, v) & r_{u_2}(u, v) & r_{u_3}(u, v) \\ r_{v_1}(u, v) & r_{v_2}(u, v) & r_{v_3}(u, v) \end{pmatrix}$$



## 8.3.2 Area Superficie

Si potrebbe pensare che come stimavamo l'area della curva con il sup delle poligonali iscritte, qui potremmo fare lo stesso. E invece no. A volte la vita è triste.

Stimiamo allora l'area con quella dei quadrati formati dai vettori tangenti (ecco perchè li abbiamo fatti). Abbiamo una base e un'altezza che sono rispettivamente  $\Delta u = \underline{r}_u$ ,  $\Delta v = \underline{r}_v$



Quindi ovviamente quello che otteniamo, portando i  $\Delta \rightarrow \delta$  è il prodotto tra i due vettori (anzi il modulo, perchè è un'area).

### **Definizione 100:** Area Superficie

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare, la sua area è:

$$A(\Sigma) := \iint_k \|\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v\| \, du dv \quad (8.9)$$

Nel caso di superfici cartesiane abbiamo

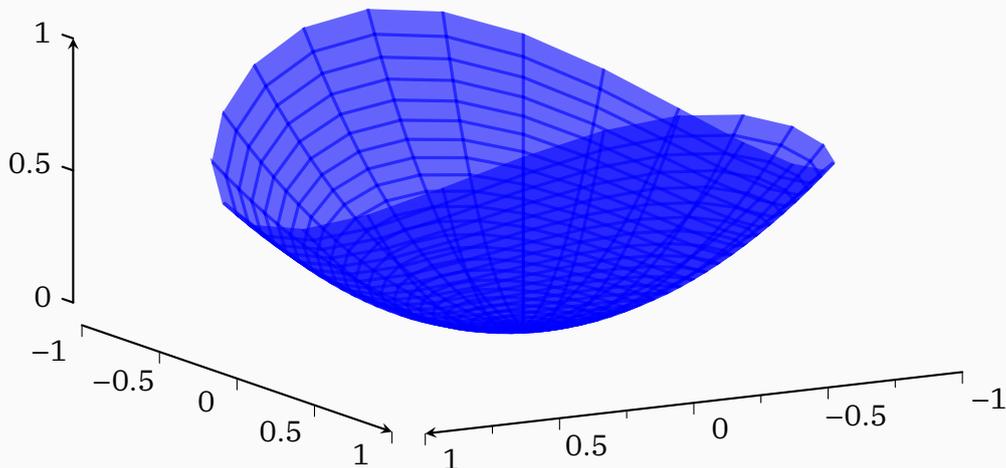
$$A(\Sigma) := \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dx dy \quad (8.10)$$

 **Esempio 32**

Calcoliamo l'Area di  $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2), x^2 + 4y^4 \leq 8 \right\}$ . Per farlo Abbiamo già la superficie cartesiana, quindi non dobbiamo fare altro che usare la formula.

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + 4y^2} dx dy \longrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos(\theta) & \rho \in [0, 1] \\ y = \sqrt{2} \sin(\theta) & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4\rho \cdot \sqrt{1 + 8\rho^2 \cos^2(\theta) + 2\rho^2 \sin^2(\theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4\rho \sqrt{1 + 8\rho^2} d\rho d\theta = \frac{26\pi}{3} \end{aligned}$$

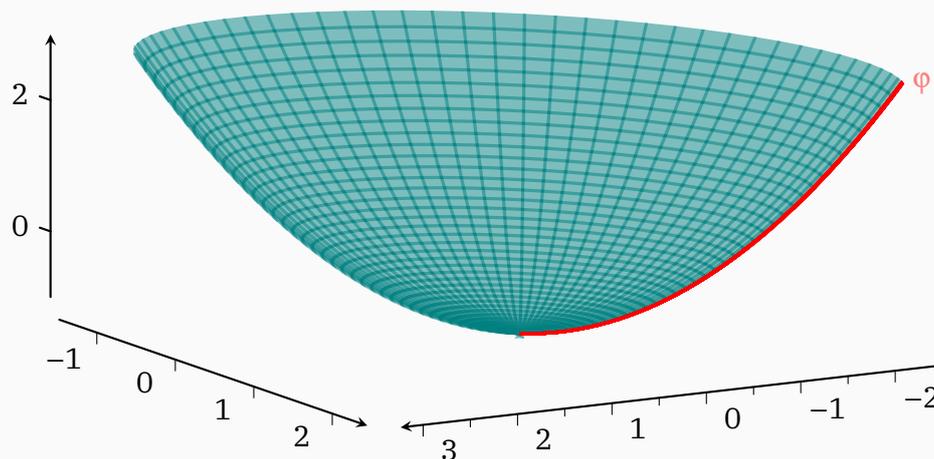
In cui abbiamo usato le coordinate polari ellittiche, non scordandoci che il determinante dello Jacobiano in questo caso è  $4\rho$ , e non semplicemente  $\rho$ .



### 8.3.3 Superfici di Rotazione

#### Definizione 101: Superficie di Rotazione

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare semplice e tale che  $x(t) > 0 \forall t \in ]a, b[$ . Allora chiamiamo **Superficie di Rotazione** relativa a  $\varphi$  quella ottenuta ruotando la curva di  $\theta_0$ .



La superficie ammette parametrizzazione cartesiana, infatti basta porre

$$r : \begin{cases} x = x(t) \cos(\theta) \\ y = x(t) \sin(\theta) \\ z(t) = z(t) \end{cases}, \text{ con } \begin{cases} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, \theta_0] \\ k = [a, b] \times [0, \theta_0] \end{cases}$$

È regolare perchè  $r \in C^1(k)$  siccome la curva è regolare. Per quanto riguarda il rango dello Jacobiano ho bisogno che  $rg(J(r)) = 2$  in  $\overset{\circ}{K} \iff \|\underline{r}_t \times \underline{e}_\theta\| \neq 0$ .

Siano poi  $(t_1, \theta_1), (t_2, \theta_2) \in \overset{\circ}{k}$  due punti diversi e tali che  $r(t_1, \theta_1) = r(t_2, \theta_2)$ . Allora, iniziando da questa condizione, possiamo fare:

$$\begin{cases} x(t_1) \cos(\theta_1) = x(t_2) \cos(\theta_2) \\ x(t_1) \sin(\theta_1) = x(t_2) \sin(\theta_2) \\ z(t_1) = z(t_2) \end{cases}$$

Sommando i quadrati ottengo  $x^2(t_1) = x^2(t_2), z(t_1) = z(t_2)$  ma  $x(t) \geq 0$  e la curva è semplice, quindi necessariamente  $t_1 = t_2$ . Per l'angolo invece le cose si semplificano ora che abbiamo dimostrato l'iniettività per la prima variabile. Infatti rimane solo  $\cos(\theta) = \cos(\theta)$  e  $\sin(\theta) = \sin(\theta)$ , ma siccome

$$\theta \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

È semplice, è anche iniettiva per  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , e sappiamo che  $\theta_0 \leq 2\pi$ . Per quanto riguarda il Jacobiano che avevamo lasciato in sospeso, calcoliamo

$$\begin{aligned} \underline{r}_t &= (x'(t) \cos(\theta), x' \sin(\theta), z'(t)) \\ \underline{r}_\theta &= (-x(t) \sin(\theta), x \cos(\theta), 0) \end{aligned}$$

A questo punto calcolo

$$\begin{aligned} \|\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\| &= \|(-x(t)z'(t) \cos(\theta), -x(t)z'(t) \sin(\theta), x(t)x'(t))\| \\ &= \sqrt{x^2(t)(z'(t))^2 + x^2(t)(x'(t))^2} = x(t) \|\underline{\varphi}'(t)\| > 0 \end{aligned}$$

Ed è sempre maggiore di 0 perchè da definizione di superficie di rotazione  $x(t) > 0 \forall t$ , e il modulo della derivata della curva pure perchè essa è regolare.

### **Definizione 102:** Area Superficie di Rotazione

Sia  $\Sigma$  il sostegno di una superficie di rotazione a partire da  $\varphi, \theta_0$ . La sua area vale

$$A(\Sigma) = \theta_0 \int_{\varphi} x ds \tag{8.11}$$

Questo perchè Facendo il calcolo a partire dalla formula analitica

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_k \|\underline{r}_t \wedge \underline{r}_\theta\| = \int_a^b \int_0^{\theta_0} x(t) \|\varphi'(t)\| d\theta dt \\ &= \theta_0 \int_a^b x(t) \|\varphi'(t)\| dt = \theta_0 \int_{\varphi} x ds \end{aligned}$$

In cui abbiamo usato il risultato ottenuto prima per sostituire il prodotto tra i vettori derivata, poi abbiamo svolto l'integrale su  $\theta$  siccome non c'erano dipendenze, e infine abbiamo considerato che l'integrale di una funzione calcolata su una curva è uguale all'integrale sugli estremi della curva della funzione per il modulo della derivata della curva, ovvero come già visto nell'[Equazione 5.4](#) e considerando  $x(t)$  come funzione:

$$\int_{\varphi} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

**π Teorema 38:** Teorema di Guldino per Superfici di Rotazione

L'area della superficie di rotazione  $\Sigma$  è uguale al prodotto tra l'arco di circonferenza percorso dal baricentro della curva  $\varphi(\theta_0 x_B)$  e la lunghezza della curva stessa.

$$A(\Sigma) = \theta_0 \cdot L_\varphi \cdot x_B \quad (8.12)$$

**Esempio 33:** Sfera

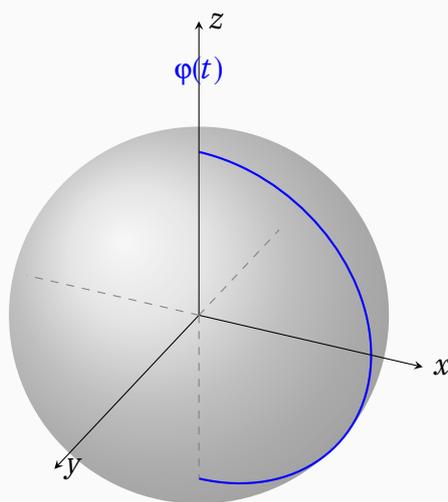
Vediamo l'Area di una sfera come superficie di rotazione. Possiamo parametrizzarla in modo standard con

$$r : \begin{cases} x(t) = R \sin(\theta) \cos(\alpha) \\ y(t) = R \sin(\theta) \sin(\alpha) \\ z(t) = R \cos(\theta) \end{cases}, k := [0, \pi]_{-\alpha} \times [0, 2\pi]_{-\theta}$$

A questo punto usando la formula per definizione

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_k \|\underline{r}_t \wedge \underline{r}_\theta\| = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(\alpha) d\alpha d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -R^2 \cos(\alpha) \Big|_0^\pi d\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2 d\theta = \boxed{4\pi R^2} \end{aligned}$$

Oppure possiamo operare in altro modo. Vediamo la sfera appunto come una superficie di rotazione di una curva, tale curva va parametrizzata con un angolo che va da 0 a 180 (oppure da -90 a 90 e così via).



A questo punto consideriamo la nostra curva  $\varphi(t)$  relativamente agli assi  $x, z$  in un punto in cui  $x > 0$  (seguendo la definizione, altrimenti possiamo fare un po' come ci pare ma dobbiamo variare le operazioni che facciamo per adattarci alle coordinate

📄 Esempio 33 continued

scelte) e con  $y$  fissato. La nostra curva ovviamente è metà circonferenza che però, per avere  $x > 0$  deve andare da  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ . La curva è quindi

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ z(t) = R \sin(t) \end{cases}, t \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Mentre considerando anche la  $y$  (che varia però di un giro intero) abbiamo

$$r : \begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ y(t) = \theta \in [0, 2\pi] \\ z(t) = R \sin(t) \end{cases}$$

Quindi ovviamente in questo caso  $\theta_0 = 2\pi$ . Adesso basta applicare la formula:

$$A(\Sigma) = \theta_0 \int_{\varphi} x(t) ds = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos(t) \cdot R dt = \boxed{4\pi R^2}$$

Siamo quindi giunti allo stesso risultato

## 8.4 Integrali Superficiali

Un integrale superficiale è banalmente l'integrale di una funzione calcolato su una superficie, come succedeva con le curve. In quel caso chiamavamo spesso tale integrale *Lavoro*, per la correlazione fisica che c'è tra i due, in questo caso faremo lo stesso con il *Flusso del Campo*.

### **Definizione 103:** Integrale Superficiale

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare con sostegno  $\Sigma = r(k)$  e sia  $f : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , allora l'**Integrale Superficiale** di  $f$  su  $\Sigma$  è

$$\int_{\Sigma} f d\sigma := \iint_{\Sigma} f(r(u,v)) \cdot \|r_u \wedge r_v\| dudv \quad (8.13)$$

*Osservazione:* l'integrale non dipende dalla parametrizzazione. La definizione è ben posta.

Per la terza e non ultima volta, definiamo di nuovo La massa, il Baricentro e il Momento di Inerzia.

### **Definizione 104:** Massa, Baricentro e Momento di Inerzia

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con sostegno  $\Sigma = r(k)$  e sia  $\mu : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  la funzione densità di massa, allora definiamo:

- **Massa Totale:** l'oggetto  $M := \iint_{\Sigma} \mu d\sigma$ ;
- **Baricentro/Centro di Massa:** il vettore  $\underline{B} = (x_b, y_b, z_b)$  in cui ogni componente vale  $x_{iB} = \frac{1}{M} \cdot \iint_{\Sigma} x_i \mu d\sigma$ ;
- **Momento d'Inerzia:** l'oggetto  $I_r := \iint_{\Sigma} d^2(\bullet, r) \mu d\sigma$  in cui come sempre  $d^2$  è la distanza del punto dalla retta.

## 8.5 Integrali Tripli

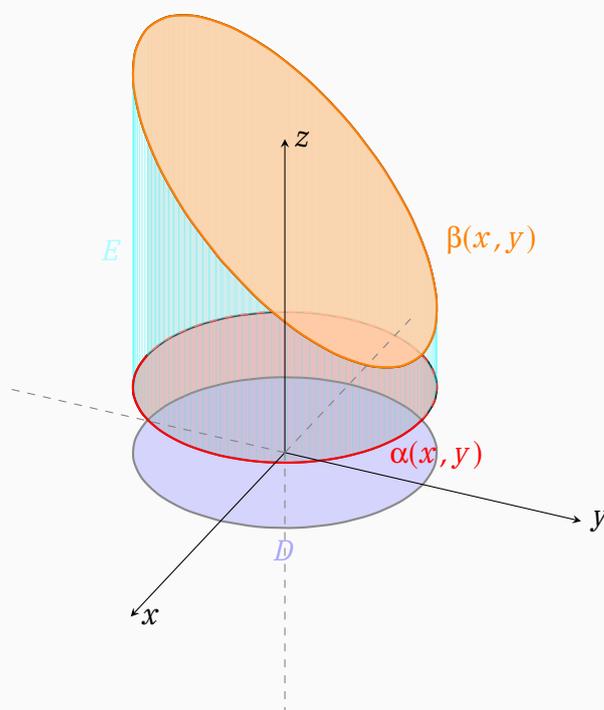
Anche in questo caso, i Teoremi di Fubini e Tonelli valgono (anche qui non lo dimostriamo) quindi siamo in grado di svolgere questi integrali in modo relativamente facile. Prima di dare definizioni di integrali tripli e tecniche di integrazione, dobbiamo ridefinire i domini normali in tre dimensioni.

### **Definizione 105:** Dominio Normale

Sia

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \right\}$$

Esso si definisce **Dominio Normale** se  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è un dominio normale e  $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue, contenute in  $D$  e tali che  $\alpha \leq \beta \forall (x, y) \in D$ .



*Osservazione:* Il dominio è misurabile poichè è la differenza di sottolivelli di funzioni continue (e quindi misurabili) in un dominio  $D$  misurabile. In modo analogo si definiscono domini  $xz$ -Normali e  $yz$ -Normali.

### **Definizione 106:** Dominio Normale

Se  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  è dominio  $xz$ -Normale e/o  $yz$ -Normale e/o  $xy$ -Normale, esso è **Dominio Normale (regolare)**.

 **Definizione 107:** Dominio Regolare

$E \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice poi **Dominio Regolare** se è unione di un numero finito di domini normali regolari con interno disgiunto, ovvero

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad \overset{\circ}{E}_j \cap \overset{\circ}{E}_l = \emptyset \quad \forall j \neq l$$

## 8.5.1 Tecniche di Integrazione

 **Definizione 108:** Integrale per Fili

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  dominio  $xy$ -Normale e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile. Allora l'integrale triplo della funzione su  $E$  può essere svolto come l'integrale doppio su  $D$  (ovvero l'insieme di appartenenza di  $(x, y)$ ) dell'integrale tra le funzioni limitanti di  $z$ . Detto in modo facile

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \quad (8.14)$$

Quindi facciamo variare  $x, y$  all'interno di  $D$  una volta fissata  $z$  per ogni "altezza" tra le due funzioni limitanti.

 **Definizione 109:** Integrale per Strati

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  dominio  $xy$ -Normale. Siano anche  $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$  e che  $E \cap \{z = c\} \neq \emptyset \iff c \in [a, b]$ . Sia poi la funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile, allora posso calcolare l'integrale triplo della funzione su  $E$  come l'integrale tra  $a$  e  $b$  del doppio integrale su  $x, y$ , ovvero

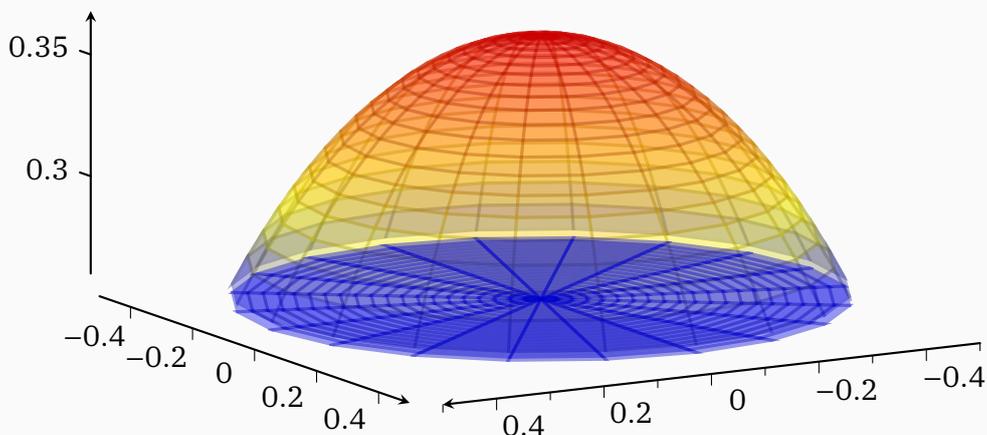
$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{E_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \quad (8.15)$$

In cui  $E_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E \right\}$

### Esempio 34

Calcoliamo il volume di

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$



In cui le funzioni sono chiaramente  $\alpha = 0, \beta = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ . Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_S dx dy dz &= \iint_D \left( \int_0^{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} 1 dz \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \longrightarrow \begin{cases} x = a\rho \cos(\theta), & \rho \in [0, 1] \\ y = b\rho \sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \cdot ab\rho d\rho d\theta = \frac{ab\pi}{2} \end{aligned}$$

Introduciamo poi le coordinate cilindriche e sferiche per operare su domini tridimensionali. Esse sono simili a quelle polari fatte fin ora.

### Definizione 110: Coordinate Cilindriche

Definiamo come **Coordinate Cilindriche** la funzione

$$\phi : (x, y, z) \iff (\rho, \theta, z)$$

☰ Definizione 110 continued

$$\phi : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} ; \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

☰ **Definizione 111:** Coordinate Sferiche

Definiamo come **Coordinate Sferiche** la funzione

$$\phi : (x, y, z) \iff (\rho, \theta, \varphi)$$

$$\phi : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases} ; \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

☰ **Definizione 112:** Volume

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile. Il suo **Volume** è il triplo integrale della funzione  $f \equiv 1$ , ovvero

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E dx dy dz := m(E) \quad (8.16)$$

Per l'ultima volta (forse) diamo definizione di Massa totale, Baricentro e (indovinate un po') momento di Inerzia.

☰ **Definizione 113:** Massa, Baricentro e Momento di Inerzia

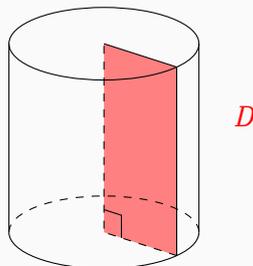
Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  dominio regolare (ovvero un solido) e sia  $\mu : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  la funzione densità di massa, allora definiamo:

- **Massa Totale:** l'oggetto  $M := \iiint_E \mu(x, y, z) dx dy dz$ ;
- **Baricentro/Centro di Massa:** il vettore  $\underline{B} = (x_b, y_b, z_b)$  in cui ogni componente vale  $x_{iB} = \frac{1}{M} \cdot \iiint_E x_i \mu(x, y, z) dx dy dz$ ;
- **Momento d'Inerzia:** l'oggetto  $I_r := \iiint_E d^2(\bullet, r) \mu(x, y, z) dx dy dz$  in cui come sempre  $d^2$  è la distanza del punto dalla retta.

## 8.5.2 Solidi di Rotazione

### Definizione 114: Solido di Rotazione

Sia  $D \subseteq \left\{ \text{Semipiano } xz \mid x \geq 0 \right\}$ , ovvero un semipiano di  $\mathbb{R}^3$  ma sullo spazio tridimensionale, tale che  $D$  è un Dominio Normale. Il **Solido di Rotazione** relativo a  $D$  è il solido ottenuto dalla rotazione di  $D$  attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ .



### Definizione 115: Volume di un Solido di Rotazione

Per il calcolo del volume di un solido di rotazione, partiamo dalla formula che già conosciamo e calcoliamo

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E 1 dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^{\theta_0} \rho dz \right) d\rho d\theta = \theta_0 \iint_D \rho d\rho dz = \theta_0 \iint_D x dx dz$$

Quindi esattamente come con l'area di una superficie di rotazione, anche qui abbiamo

$$\text{Vol}(E) = \theta_0 \cdot x_B \cdot A(D) \quad (8.17)$$

*Osservazione:* Per come abbiamo definito l'area di una superficie di rotazione, se riusciamo a vedere  $D$  come una di queste (non sempre riusciamo o è conveniente) possiamo calcolare il volume del solido come

$$\text{Vol}(E) = \theta_0 \cdot x_{B_D} \cdot \underbrace{\theta_1 \cdot L_\varphi \cdot x_{B_\varphi}}_{=A(D)}$$

### $\pi$ Teorema 39: Teorema di Guldino per Solidi di Rotazione

Il volume del solido di rotazione ottenuto dalla rotazione di un dominio piano intorno ad una retta che non lo interseca, è pari al prodotto tra l'area del dominio stesso per la lunghezza dell'arco percorso dal baricentro del dominio.

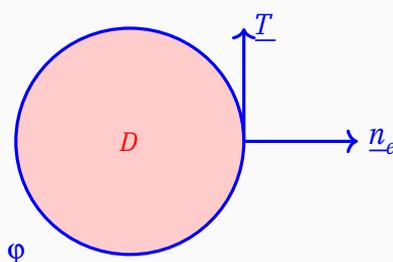
## 8.6 Superfici Orientabili

### Definizione 116

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare, il bordo  $\partial D$  si dice **Orientato Positivamente** se presa una curva semplice  $\varphi$  che percorre  $\partial D$  nel senso indicato,  $\underline{n}_e$  è il versore tangente ruotato di  $\pi/2$  in senso orario, dove

$$\underline{T} = \left( \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \right)$$

La notazione è  $+\partial D$ .



### Teorema 40: Formule di Gauss-Green

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare, e  $\mathbb{R}^2 \supseteq E \supseteq D$  con  $E$  aperto. Siano poi le funzioni  $A, B : E \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(E)$ . Allora valgono le seguenti:

- $\iint_D \frac{\partial A}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} A(x, y) dy;$
- $\iint_D \frac{\partial B}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial D} B(x, y) dx;$

*Osservazione:* Se  $C = \bigcup_{i=1}^n D_i$  con  $D_i$  domini normali regolari, percorrendo i vari  $\partial D_i$  in senso positivo, anche se alcuni bordi sono "uguali" se percorsi nel verso giusto si elimineranno a vicenda, poichè per esempio  $+\partial D_1 = \varphi$  sarà tale che  $+\partial D_2 = -\varphi$ .

✓ **Dimostrazione 27:** Caso con  $D$  che è  $x$ -Normale o  $y$ -Normale

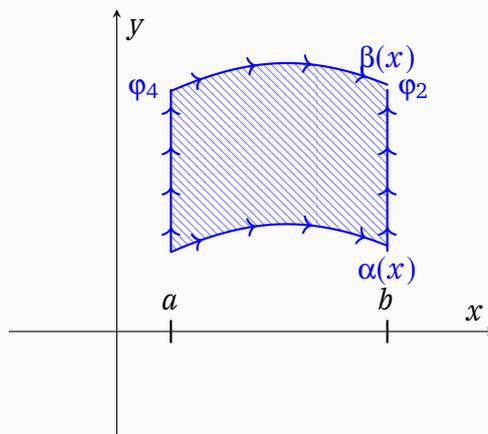
Usando il fatto che  $D$  è  $x$ -Normale, lo scriviamo come

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq \beta(x) \right\}, \alpha, \beta \in C^1$$

A questo punto calcoliamo prima l'integrale come è formulato a sinistra della formula, e poi come lo è a destra, e vediamo che essi sono uguali (ci riferiamo alla formula del **Teorema 8.6**). Per il primo

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial y} dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial B}{\partial y} dy dx = \int_a^b [B(x, \beta(x)) - B(x, \alpha(x))] dx$$

Per il calcolo dell'integrale a destra dell'uguale devo parametrizzare il bordo con una curva. In particolare lo parametrizziamo con 4 curve perchè supponiamo che  $\alpha, \beta$  siano senza punti comuni, ovvero le curve non si toccano ma abbiamo bisogno di due curve in cui la  $x$  è fissata e varia solo la  $y$  (vedi figura, si tratta di  $\varphi_2, \varphi_4$ ). In realtà questo non cambia nulla, poichè come vedremo gli integrali su queste due curve fanno 0. Così copriamo quindi tutti i casi possibili.



In questo caso vediamo come  $\alpha, \beta$  siano rispettivamente  $\varphi_1, \varphi_3$  all'interno del dominio. Le parametrizzazioni delle curve sono abbastanza semplici:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = (t, \alpha(t)), & t \in [a, b] \\ \varphi_2(t) = (b, t), & t \in [\alpha(b), \beta(b)] \\ -\varphi_3(t) = (t, \beta(t)), & t \in [a, b] \\ -\varphi_4(t) = (a, t), & t \in [\alpha(a), \beta(a)] \end{cases}$$

Le derivate sono rispettivamente

✓ Dimostrazione 27 continued

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = (1, \alpha'(t)) \\ \varphi_2'(t) = (0, 1) \\ -\varphi_3'(t) = (1, \beta'(t)) \\ -\varphi_4'(t) = (0, 1) \end{cases}$$

Quindi l'integrale è la somma degli integrali sulle curve:

$$-\int_{+\partial D} B(x, y) dx = -\sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} B(x, y) dx$$

E ogni integrale è rispettivamente:

$$\int_{\varphi_1} B dx = \int_a^b B(t, \alpha(t)) \cdot 1 dt$$

$$\int_{\varphi_2} B dx = \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} 0 dt$$

$$\int_{-\varphi_3} B dx = -\int_a^b B(t, \beta(t)) \cdot 1 dt$$

$$\int_{-\varphi_4} B dx = -\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} 0 dt$$

Seguendo la formula  $\int_{\varphi} f d\sigma = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ . Quindi mettendo insieme gli integrali

$$-\sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} B(x, y) dx = \int_a^b [B(x, \beta(x)) - B(x, \alpha(x))] dx$$

I due integrali coincidono. Per dimostrare l'altra formula uso che  $D$  è  $y$ -Normale. L'idea del caso più generico (solo con una delle due normalità del dominio) è di usare le forme esatte.

**$\pi$  Corollario 5**

Dalle formule di Gauss-Green, l'area di un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  regolare diventa

$$A(D) = \int_{+\partial D} x \, dy = - \int_{+\partial D} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y \, dx + x \, dy) \quad (8.18)$$

**✓ Dimostrazione 28**

Calcolando dalla formula analitica

$$A(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

E considerando 1 sia come  $\partial_x A, \partial_y B$  allora le funzioni saranno rispettivamente  $A = x, B = y$  e la formula diventa in entrambi i casi

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{+\partial D} x \, dy$$

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = - \int_{+\partial D} y \, dx$$

Facendone poi una media tra le due troviamo

$$\frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y \, dx + x \, dy)$$

**π Teorema 41:** Teorema della Divergenza

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare, tale che  $\mathbb{R}^2 \supseteq E \supseteq D$  con  $E$  aperto. Sia poi la funzione  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1(E)$  campo vettoriale. Allora vale

$$\int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e d\sigma = \iint_D \operatorname{div}(\underline{F}(x, y)) dx dy \quad (8.19)$$

In cui

$$\operatorname{div}(\underline{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

**✓ Dimostrazione 29**

Usiamo le formule di Gauss-Green. Scriviamo

$$\iint_D \operatorname{div}(\underline{F}(x, y)) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy + \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy$$

Quindi abbiamo già le due funzioni separate e derivate rispetto alla variabile. A questo punto usando le formule:

$$\int_{+\partial D} F_1 dy - \int_{+\partial D} F_2 dx = \int_{+\partial D} (-F_2 dx + F_1 dy)$$

Da qui assumo  $\partial D$  connesso, e lo parametrizzo come una curva  $\varphi$ , e ottengo

$$\int_{\varphi} (-F_2 dx + F_1 dy) = \int_{\varphi} (-F_2, F_1) \cdot \underline{T} ds$$

In cui  $(-F_2, F_1)$  è il campo associato alla forma, e  $\underline{T} = \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|}$ . Come abbiamo già detto nella **Definizione 8.6**  $\underline{n}_e$  è proprio questo vettore ma ruotato, quindi se  $\underline{n}_e = (n_1, n_2)$  allora avrò che  $\underline{T} = (-n_2, n_1)$  quindi riscriviamo

$$\longrightarrow \int_{\varphi} (-F_2, F_1) \cdot (-n_2, n_1) ds = \int_{\varphi=+\partial D} (F_2 n_2 + F_1 n_1) ds = \int_{+\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e ds$$

Resta che nella dimostrazione il bordo è orientato positivamente, ma questo non cambia niente siccome il verso non cambia il segno dell'integrale. Anche l'aver supposto  $\partial D$  come connesso non cambia niente, siccome se non lo fosse dividerei  $D$  in tanti  $D_i$  ciascuno connesso, e sommerei.

**Definizione 117:** Flusso

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare. Scelgo un versore normale che sia  $\underline{T}$  ruotato di  $\pi/2$  in senso orario o antiorario. Allora diciamo che il **Flusso** di una funzione  $F$  attraverso  $\varphi$  nel verso di  $\underline{n}$  è

$$\Phi_F(\varphi) = \int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{n} \, ds \quad (8.20)$$

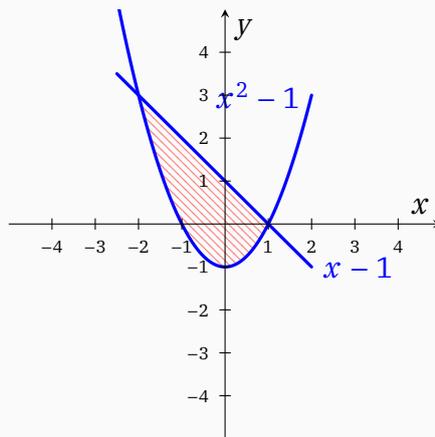
**Esempio 35**

Dobbiamo calcolare il flusso uscente del campo

$$\underline{F} = (3x^2 + y^2, x^3 - 3y^2)$$

Attraverso il bordo di

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x \right\}$$



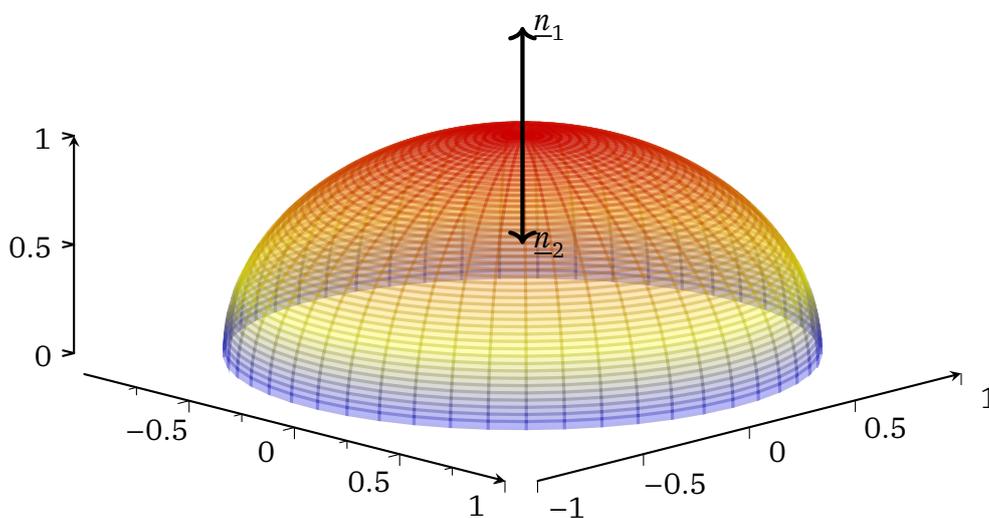
Usando il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \Phi_F(\partial D) &= \int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dx dy = \iint_D (6x - 6y) \, dx dy \\ &= 6 \int_{-2}^1 \left( \int_{x^2-1}^{1-x} (x - y) \, dy \right) dx = -\frac{297}{10} \end{aligned}$$

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare con sostegno  $\Sigma = r(k)$ . Per definire la superficie orientabile ho bisogno di un paio di cose. Notiamo innanzitutto che il vettore

$$\frac{\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v\|}$$

È ben definito perchè  $\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v \neq 0$  in  $\overset{\circ}{k}$ . È inoltre un vettore perpendicolare e quindi normale alla superficie (anche quello che punta nell'altra direzione lo è). Possiamo quindi scegliere uno dei due versori e chiamarlo **Vettore Normale Positivo** a patto però che questo sia sempre da un lato, e che quindi non possa mai essere uguale all'altro vettore. Basta pensare a una ciotola, un foglio... questa è una buona definizione per orientabilità di una superficie.



### **Definizione 118:** Superficie Orientabile

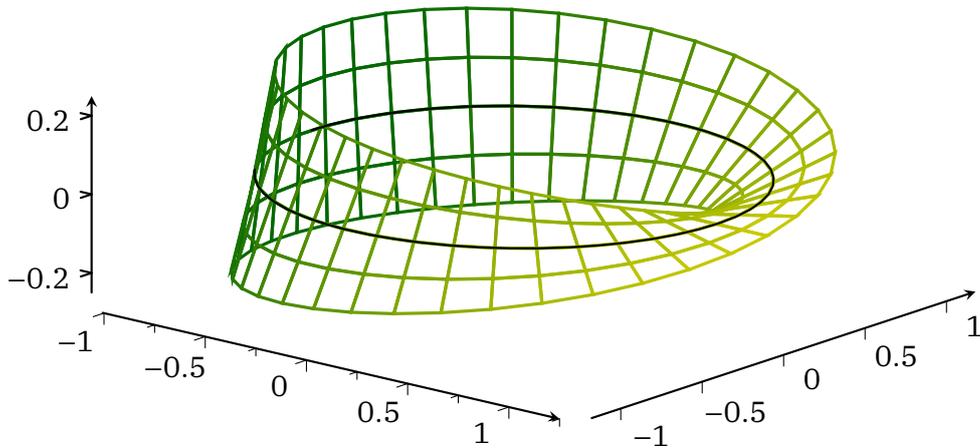
Una superficie  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **Orientabile** se posso estendere  $\underline{n}$  a tutto  $\Sigma$  in modo continuo, cioè se data  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Sigma$  curva chiusa  $\implies \underline{N}(\varphi(t))$  è continua in  $[a, b]$ .

*Osservazione:* Una superficie  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v \neq 0$  e regolare con  $r$  iniettiva su  $k$  è orientabile poichè la mappa

$$(u, v) \mapsto \frac{\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v\|}$$

È continua su  $k$ . Questo vuol dire anche che  $r^{-1} : \Sigma \rightarrow k$  è continua

Un esempio di superficie non orientabile è il nastro di Mobius, siccome fissando un versore normale e un altro dall'altra lato, percorrendo la superficie i due si sovrappongono, ovvero non c'è un verso.

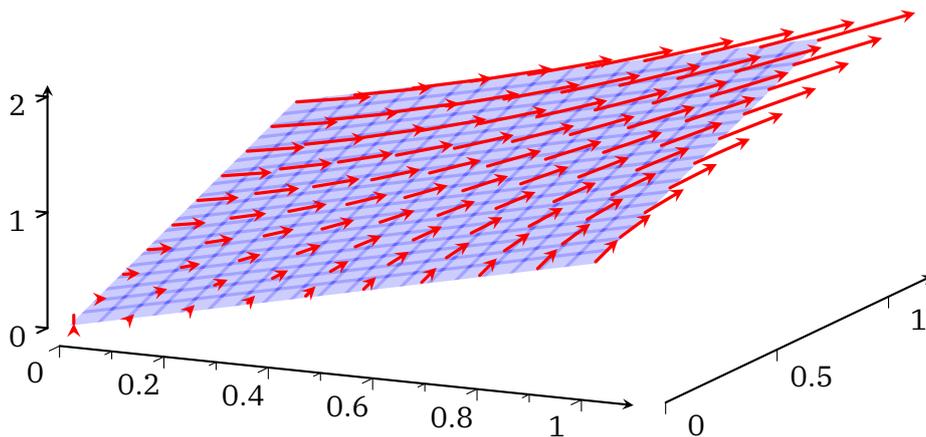


**Definizione 119:** Flusso di  $F$  attraverso  $\Sigma$

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare orientabile di sostegno  $\Sigma = r(k)$ . Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto :  $\Sigma \subseteq A$  e sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vettoriale continuo in  $A$ . Chiamiamo **Flusso di  $F$  attraverso**  $\Sigma$  nel verso di  $\underline{n}$  (scelto arbitrariamente):

$$\Phi_F(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma \quad (8.21)$$

Quello che stiamo dicendo è che se la superficie è contenuta in  $A$  e il campo vettoriale agisce su tutto  $A$ , allora in ogni punto di  $\Sigma$  c'è  $F$ , siccome c'è in ogni punto di  $A$ .



Osserviamo poi che per definizione di Integrale Superficiale il flusso diventa

$$\Phi_F(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iint_k \underline{F}(r(u, v)) \cdot (r_{\underline{u}} \wedge r_{\underline{v}}) \, du \, dv$$

Diamo una versione più generica del teorema della Divergenza.

**π Teorema 42:** Teorema della Divergenza

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  dominio regolare. Sia anche  $\mathbb{R}^3 \supseteq A \supseteq D$  con  $A$  aperto e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vettoriale di classe  $C^1(A)$ , allora

$$\iiint_D \operatorname{div} \underline{F} \, dx dy dz = \iint_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma \quad (8.22)$$

La differenza più sostanziale è che  $\partial D$  è una superficie e non una curva. Ricordiamo sempre la divergenza che dandone una formulazione generale è

$$\operatorname{div} \underline{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

**π Proposizione 17:** Identità utili

Ecco alcune identità utili derivate dal **Teorema 8.6**. Date  $u, \omega \in C^1(\Omega)$ ,  $\underline{F} \in C^2(\Omega)$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  dominio di integrazione e  $u, \omega$  forme differenziali, valgono:

- $\iiint_{\Omega} \nabla^2 \omega \, dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \nabla \omega \cdot \underline{n}_e \, d\sigma;$
- $\iiint_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} \underline{F} \, dx dy dz = - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \underline{F} \, dx dy dz + \iint_{\Omega} u \underline{F} \cdot \underline{n}_e \, d\sigma;$
- $\iiint_{\Omega} u \nabla^2 \omega \, dx dy dz = - \iiint_{\Omega} \nabla u \nabla \omega \, dx dy dz + \iint_{\partial \Omega} u \nabla \omega \cdot \underline{n}_e \, d\sigma;$
- $\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 \omega - \omega \nabla^2 u) \, dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} (u \nabla \omega \cdot \underline{n}_e - \omega \nabla u \cdot \underline{n}_e) \, d\sigma$

In cui abbiamo usato il **Laplaciano**, ovvero l'operatore

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{Tr}(Hf) = \operatorname{div}(\nabla f) \quad (8.23)$$

## 8.7 Teorema di Stokes e Domini lacunosi

### $\pi$ Teorema 43: Teorema di Stokes

Sia  $D \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare con  $A$  aperto. Sia anche  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1(A)$ , allora

$$\iint_D [\nabla \times F]_3 dx dy = \int_{+\partial D} \underline{F} \cdot \underline{t} ds \quad (8.24)$$

Dove  $[\nabla \times F]_3$  è la terza componente del rotore di  $F$ , ovvero

$$[\nabla \times F]_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Abbiamo considerato la forma  $\omega = F_1 dx + F_2 dy$  e abbiamo riscritto il lavoro compiuto sulla curva dal campo associato.

### $\checkmark$ Dimostrazione 30

Usiamo anche qui le formule di Gauss-Green. In particolare esplicitando il rotore otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_D [\nabla \times F]_3 dx dy &= \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{+\partial D} (F_2 dy + F_1 dx) = \int_{+\partial D} \underline{F} \cdot \underline{t} ds \end{aligned}$$

Possiamo adesso dimostrare il **Teorema 5.3** visto nel Capitolo 5, che riscriviamo in un'altra formulazione equivalente:

### $\pi$ Teorema 44

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^{2(o3)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(o3)} \in C^1(A)$  con  $A$  aperto semplicemente connesso, allora

$$\underline{F} \text{ irrotazionale} \iff \underline{F} \text{ conservativo}$$

### ✓ Dimostrazione 31: Nel caso $\mathbb{R}^2$

L'implicazione a sinistra  $\Leftarrow$  è gratuita, manca solo l'altra. Dovremmo trovare un potenziale  $U$  ma non sappiamo com'è fatto  $F$ . Ci *basta* quindi dimostrare che il lavoro su ogni curva regolare a tratti è nullo (ovvero il teorema di caratterizzazione delle forme esatte).

$$\xrightarrow{\text{P.to di arrivo}} \int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds = 0$$

Supponiamo  $\varphi$  semplice (altrimenti la spezzo in curve semplici). Anche  $A$  è semplicemente connesso quindi non ha buchi e per il teorema di Jordan (non visto, ma dato per scontato in **Definizione 5.3**) allora  $\varphi = \partial D$  ovvero il sostegno della curva è la frontiera di un certo dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare. Applico Stokes, non sapendo l'orientazione pongo  $\pm \partial D$  ma non cambia nulla perchè tanto viene 0 (oppure formalmente la assumo positiva e mi accorgo alla fine che non fa una piega):

$$\int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds = \iint_D \underbrace{[\nabla \times F]_3}_{=0 \text{ per ipotesi}} \, dx dy = \iint_D 0 \, dx dy = 0$$

Supponiamo ora un insieme del tipo  $A = \tilde{A} \setminus \{\underline{x}\}$  in cui  $\tilde{A}$  è semplicemente connesso aperto e  $\underline{x} \in A$ . Questo implica che  $A$  non è semplicemente connesso. L'esempio più pratico è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Esponiamo ora un teorema che ci garantisce l'esattezza di una forma esatta anche in un insieme di questo tipo.

Ci serve prima definire una curva che *gira attorno a un punto*, o meglio attorno all'origine per il nostro esempio.

### **Definizione 120:** Curva che gira attorno all'origine

Diciamo che una curva  $\varphi$  compie un **Giro attorno all'Origine** (o attorno a qualsiasi punto in realtà) se la "somma" degli angoli percorsi dai vari punti è un angolo giro.

### **Teorema 45**

Sia  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\omega$  chiusa in  $A$ ,  $\omega \in C^1(A)$ . Supposto che  $\exists \bar{\varphi}$  chiusa, semplice, con sostegno in  $A$ , che *compie un giro attorno all'origine* e tale che

$$\int_{\bar{\varphi}} \omega = 0$$

Allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .

### **Dimostrazione 32**

Usiamo il **Teorema 5.3**, e *basta semplicemente* mostrare che l'integrale sulla curva della forma è nullo per ogni poligonale chiusa con sostegno in  $A$ . Distinguiamo tre casi, in ognuno dei quali la curva gira in senso antiorario (basta mettere un - altrimenti):

- Se  $\bar{\varphi}$  NON gira attorno all'origine (ovvero  $\varphi_1$  in figura, la piccola sezione di una curva più grande, per comodità e per non fare tre figure diverse), allora abbiamo un normale caso di curva su un aperto semplicemente connesso (in questo caso la lacuna non ci interessa proprio), allora calcoliamo:

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_1} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds \stackrel{\text{Stokes}}{=} \pm \iint_D \underbrace{[\nabla \times F]_3}_{=0 \text{ per ipotesi}} \, dx dy = 0$$

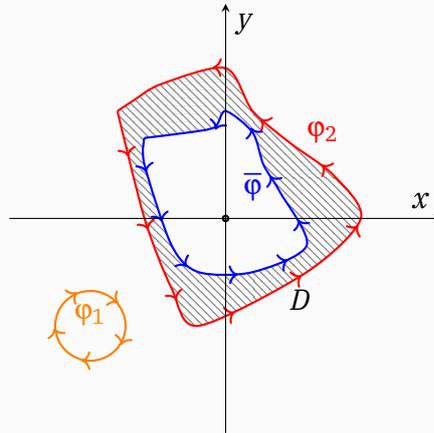
- Se invece la curva passa attorno all'origine considero  $\varphi_2, \bar{\varphi}$  disgiunti, queste formano un dominio tale che  $+\partial D = \varphi_2 \cup (-\bar{\varphi})$ , quindi calcolo la somma degli

✓ Dimostrazione 32 continued

integrali, poichè esso è l'integrale sul bordo del dominio usando Stokes:

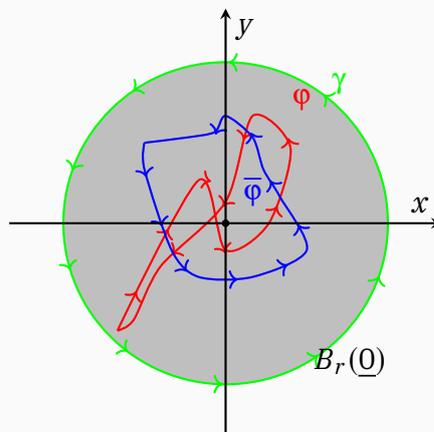
$$\int_{\varphi_1} \omega + \int_{-\bar{\varphi}} \omega = \int_{+\partial D} \omega = \iint_D [\nabla \times F]_3 dx dy = 0$$

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\bar{\varphi}} \omega = 0$$



- L'ultimo caso è quello in cui le due curve si intersecano. Considerando sempre un senso antiorario, il loro sostegno non è disgiunto. Siccome le componenti sono funzioni continue su un compatto, allora  $\|\varphi(t)\|, \|\bar{\varphi}(t)\|$  ammettono entrambi massimo, che chiamiamo  $t \in [a, b], \bar{t} \in [c, d]$ . Esiste quindi anche una palla che contiene entrambe le curve, basta prendere  $r > t, \bar{t}$  e costruire  $B_r(\mathbf{0})$ . Consideriamo quindi la curva  $\gamma$  come la parametrizzazione della palla percorsa in senso antiorario. A questo punto facciamo quanto fatto al punto precedente rispettivamente con  $\gamma, \varphi_1$  e con  $\gamma, \bar{\varphi}$ , trovando che

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_{\bar{\varphi}} \omega = 0$$

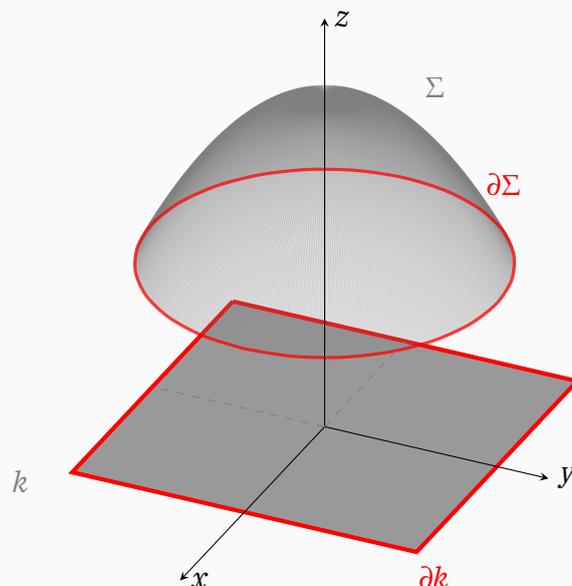


## 8.8 Bordi Superficie, di nuovo Stokes

### Definizione 121: Bordo Superficie

Sia  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare di sostegno  $\Sigma = r(k)$ . Definiamo come il **Bordo** di  $\Sigma$  l'insieme

$$\partial\Sigma = r(\partial k)$$



Questa definizione non è proprio il top. Partendo dal fatto che stiamo intendendo il bordo non in modo topologico, inoltre nascono problemi già con la parametrizzazione della sfera perchè otterremmo come bordo solo mezzo meridiano. Negli altri casi però va bene perchè spesso le problematiche relative al verso di percorrenza di  $\partial k$  si eliminano da sole, come nel caso del cilindro.

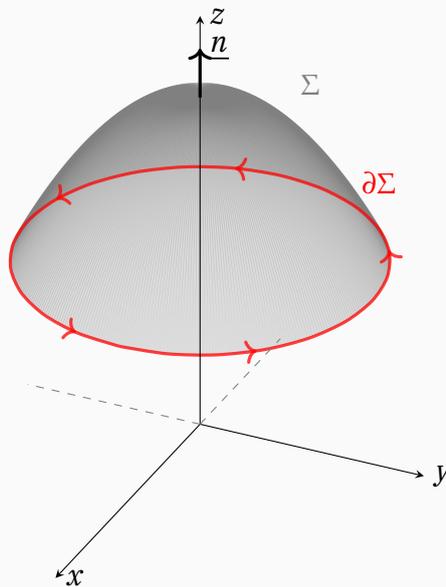
### Definizione 122: Orientazione Positiva

Una superficie  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare, orientata e di sostegno  $\Sigma = r(k)$  induce su  $\partial\Sigma$  un'**Orientazione Positiva** che è il verso per cui l'osservatore - posto sulla faccia positiva - percorre  $\partial\Sigma$  lasciando  $\Sigma$  alla sua sinistra (Oppure usiamo la **Regola della Mano Destra**).

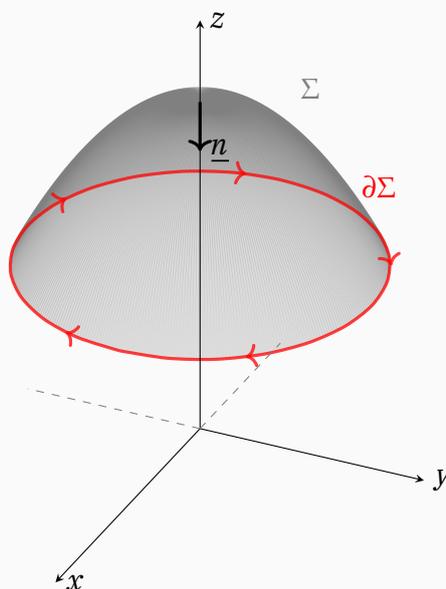
Si indica con  $+\partial\Sigma$ .

 **Esempio 36**

Sempre con la figura precedente, vediamo le due orientazioni possibili: scelto il versore con terza componente positiva, seguendo la regola della mano destra l'orientazione positiva è quella in cui il bordo è percorso in senso antiorario visto dall'alto.



Se invece consideriamo come versore positivo quello "verso l'interno" ovvero con terza componente negativa, è il contrario



Riscriviamo poi il Teorema di Stokes. Stavolta però il dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è una superficie che vive su  $\mathbb{R}^3$ .

### $\pi$ Teorema 46: Teorema di Stokes per Superfici

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^1(A)$  con  $A$  aperto. Sia poi  $r : k \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare orientabile con sostegno  $\Sigma = r(k) \in A$ . Il **Flusso del Rotore di  $F$  attraverso  $\Sigma$**  è

$$\Phi_{\nabla \times F}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{+\partial\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds \quad (8.25)$$

Abbiamo evidenziato il versore e il bordo della superficie perchè questi devono essere scelti coerentemente.

### $\text{📄}$ Esempio 37

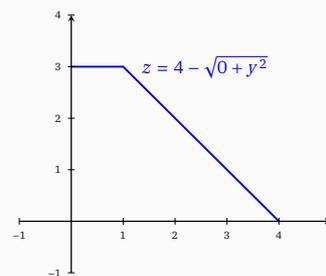
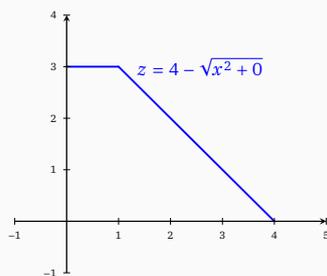
Calcoliamo il lavoro del campo  $\underline{F} = (z^2, xyz + x, 2xz)$  sul bordo della superficie laterale del solido

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (z - 4) \geq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

Orientato in modo che il versore normale abbia la terza componente positiva. Innanzitutto sviluppando la funzione che descrive il solido notiamo che

$$(z - 4)^2 = x^2 + y^2 \implies z = 4 \pm \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{0 \leq z \leq 3} z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

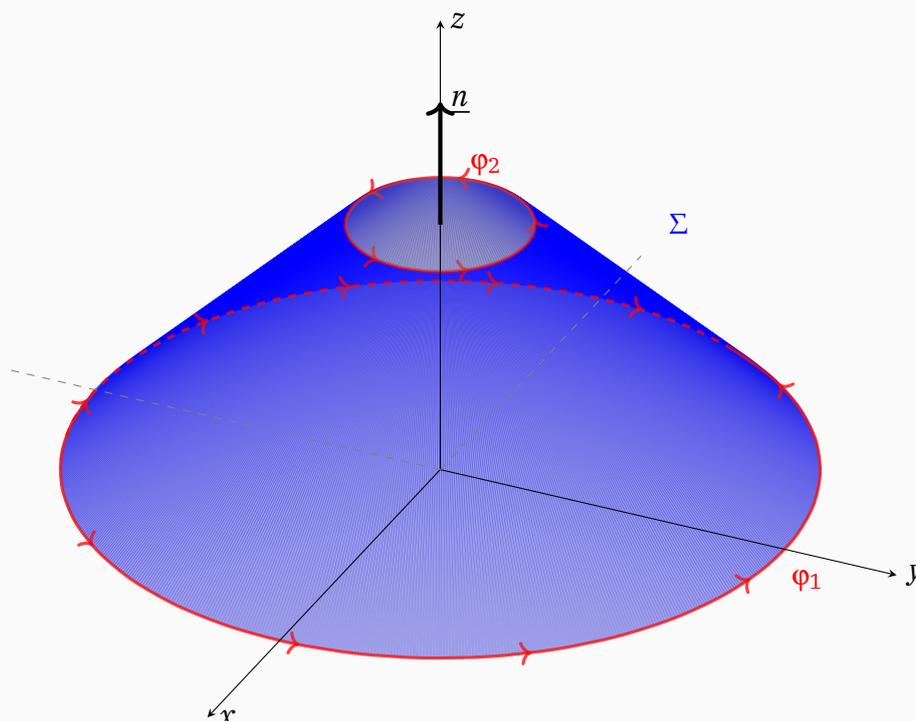
Se non si riesce a vedere cos'è questo solido (molto comprensibile, è leggermente diverso da una solita sfera o un paraboloide) passiamo in due dimensioni ponendo prima  $x = 0$  e poi  $y = 0$ :



Quindi il solido è di rotazione attorno all'asse  $z$ , una volta fissato  $x(t)$  come la curva che abbiamo appena disegnato. Il solido quindi è un cono privato della punta. È quindi facile capire qual è il bordo del solido e soprattutto l'orientazione, usando la regola della

## Esempio 37 continued

mando destra e considerando che il vettore deve avere terza componente positiva.



A questo punto abbiamo due modi per calcolare il lavoro del campo: il primo è usando Stokes e calcolare un integrale su  $\Sigma$  più che sul suo bordo, mentre il secondo è di calcolare analiticamente l'integrale sul bordo, ovvero la somma degli integrali sulle curve  $\phi_1, \phi_2$  che vanno parametrizzate. Ovviamente conviene il primo (sennò perchè qualcuno si sarebbe sforzato di inventarsi un intero Teorema a riguardo) ma noi li faremo entrambi perchè siamo masochisti. Iniziamo con Stokes:

$$\int_{+\partial\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{n} \, d\sigma \longrightarrow \Sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}, \nabla \times \underline{F} = (-xy, 0, yz + 1)$$

$$= \iint_{\Sigma} (-xy, 0, yz + 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \\ \frac{-x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{-x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + yz + 1 \right) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^4 \left[ -\rho^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \rho \sin(\theta)(4 - \rho) + 1 \right] \rho \, d\rho d\theta = \boxed{15\pi}$$

Per fare questo integrale, abbiamo parametrizzato la superficie e calcolato il rotore. Per calcolare il vettore normale sappiamo poi che  $\underline{N} = (-f_x, -f_y, 1)$  (oppure si

📄 Esempio 37 continued

calcolano i vettori derivata  $r_{\underline{x}}, r_{\underline{y}}$  e si fa il determinante della matrice che contiene i versori della base canonica e questi due vettori, viene uguale) e quindi facendo la moltiplicazione tra vettori arriviamo all'integrale in  $dx dy$  come mostrato. Da qui basta poi parametrizzare con coordinate polari, è chiaro che  $\theta \in [0, 2\pi]$  mentre per  $\rho$  dobbiamo considerare che  $0 \leq z \leq 3$  quindi  $1 \leq \rho \leq 4$ . Abbiamo anche considerato che gli integrali su un periodo o su un multiplo di un periodo del seno, del coseno e di potenze del seno sono sempre nulli (nel primo caso abbiamo  $\sin(\theta) \Big|_0^{2\pi}$  e nel secondo  $\cos^3(\theta) \Big|_0^{2\pi}$ ). Sopravvive quindi solo l'integrale di  $\rho$ .

Passiamo poi al secondo metodo per la risoluzione dell'integrale, ovvero quello analitico. Parametriamo le due curve che compongono il bordo:

$$\varphi_1 : \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \cos(\theta) \\ z = 3 \end{cases} \quad - \quad \varphi_2 : \begin{cases} x = 4 \cos(\theta) \\ y = 4 \cos(\theta) \\ z = 0 \end{cases}$$

Siccome sono due circonferenze, ovviamente in entrambi i casi  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} \int_{+\partial\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds &= \int_{\varphi_1} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds - \int_{\varphi_2} \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} (0, 4 \cos(\theta), 0) \cdot \begin{pmatrix} -4 \sin(\theta) \\ 4 \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta}_{\text{Integrale su } \varphi_1} - \\ &\quad - \underbrace{\int_0^{2\pi} (9, 3 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta), 6 \cos(\theta)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta}_{\text{Integrale su } \varphi_2} \\ &= \int_0^{2\pi} 16 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \left( -9 \sin(\theta) + 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos^2(\theta) \right) d\theta \\ &= 15 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \boxed{15\pi} \end{aligned}$$

Siccome il cubo è l'unione di 6 superfici regolari, posso vederla come una superficie regolare a tratti? Ovviamente sì, e in questo modo risolvo anche la problematica che era sorta con il bordo della sfera.

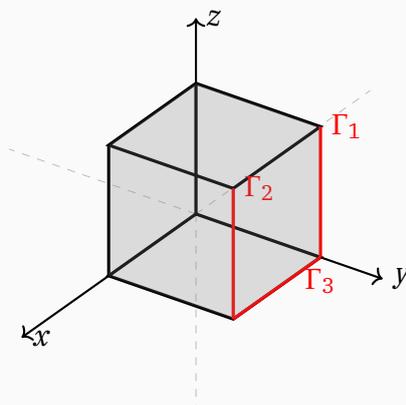
**Definizione 123:** Superficie Regolare a tratti

Diciamo che  $\Sigma$  è il sostegno di una superficie **Regolare a Tratti** se esiste un numero finito di curve  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  regolari a tratti con sostegno  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$  tali che:

$$\Sigma \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i \right) = \bigcup_{j=1}^k \bar{\Sigma}_j$$

Dove  $\bar{\Sigma}_j$  sono i sostegni di superfici regolari e un  $\Gamma_i$  può appartenere al più al bordo di due superfici.

Detto in parole povere, vuol dire che le varie curve sono il bordo di varie superfici che insieme formano il sostegno e il bordo della nostra superficie regolare a tratti.



Le curve  $\Gamma_i$  sono dette **Spigoli**.

**Definizione 124:** Bordo Superficie Regolare a Tratti

Il **bordo di una Superficie Regolare a Tratti** sono le componenti del bordo delle varie  $\bar{\Sigma}_j$  che non siano comuni a due superfici adiacenti (ovvero curve che si sovrappongono).

In questo modo sia cubo che sfera non hanno bordo, che è quello che ci si aspetterebbe in effetti.

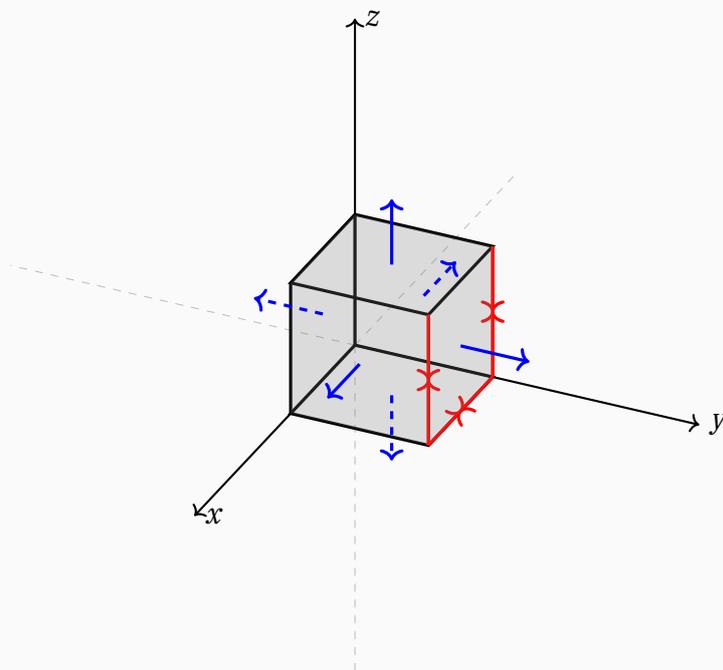
### Definizione 125: Superficie Chiusa

Una superficie regolare a tratti si dice **Chiusa** se è limitata e priva di bordo (Cubo, Sfera...).

Possiamo brutalmente dire che una superficie chiusa *divide in due* lo spazio  $\mathbb{R}^3$  tra interno ed esterno, con esterno  $\mathbb{R}^{3(ext)} = D_{\Sigma I} \cup \Sigma \cup \Sigma E$ , mentre l'interno è ciò che c'è dentro la superficie.

### Definizione 126: Superficie Orientabile

Una superficie regolare a tratti si dice **Orientabile** se lo sono le  $\bar{\Sigma}_j$ , e queste possono essere orientate in modo che gli spigoli comuni a due  $\bar{\Sigma}_j$  sono percorsi in verso opposti se percorsi nelle orientazioni positive indotte.



Quello che stiamo dicendo è che le curve danno l'orientazione, ma se sono percorse in senso opposto, essendo uguali, si annullano. Nel cubo visto sopra, le curve danno "due volte" la stessa orientazione ma sono percorse in modo opposto, quindi si annullano e resta solo il cubo con l'orientazione giusta e senza bordo, come dovrebbe essere.

**$\pi$  Proposizione 18**

Siano  $\Sigma_1, \Sigma_2$  superfici chiuse, connesse e orientabili  $\implies$  l'insieme

$$D := \overline{D_{\Sigma_2, I}} \setminus D_{\Sigma_1, I}$$

È ammissibile per il teorema della divergenza. Questo non è altro che l'intercapedine tra i due insiemi.

# 9

# Equazioni Differenziali



## Sommario

- 9.1 Definizione e Caratteristiche, 163
- 9.2 Tipi di Equazioni, 167
- 9.3 Teoremi di Esistenza Globale, 169
- 9.4 Dimostrazione Cauchy, 174

Diamo una ripassata alla definizione di Equazione Differenziale, ma vediamo anche tanti concetti nuovi per lo studio di esse.

## 9.1 Definizione e Caratteristiche

Diamo un po' di definizioni:

### **Definizione 127:** Equazione Differenziale

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Diciamo **Equazione Differenziale Ordinaria** (EDO) la relazione

$$F(t, y(t), y'(t) \dots y^{(n)}(t)) = 0 \quad (9.1)$$

E chiamiamo **Soluzione** dell'EDO una funzione  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo. La funzione è:

- $n$  volte derivabile in  $I$ ;
- tale che  $(t, y(t) \dots y^{(n)}(t)) \in A$ ;
- tale che valga l'**Equazione 9.1**  $\forall t \in I$

### **Definizione 128**

L'**Equazione 9.1** si dice **di Grado  $n$**  perchè è il più alto grado di derivazione che compare.

### **Definizione 129:** EDO autonoma

Se  $F : \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è equazione differenziale del tipo  $F(y(t), y'(t) \dots y^{(n)}(t)) = 0$ , essa è detta **Autonoma**. Si intende che è autonoma dal *tempo* ovvero dalla variabile  $t$ , essa non appare e appaiono solo funzioni del tipo  $y^{(i)}(t)$ .

### **Definizione 130:** Forma Normale

Un'equazione differenziale è detta di **Forma Normale** se è del tipo

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t) \dots y^{(n-1)}(t))$$

Dove  $f : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto.

Per ogni equazione differenziale in forma normale posso associare un relativo Problema di Cauchy.

 **Definizione 131:** Problema di Cauchy

Un problema di Cauchy è un sistema di questo tipo

$$(P) : \begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}, \quad (t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in A \quad (9.2)$$

Nel caso  $n = 1$  abbiamo un classico problema di Cauchy, uguale a quello che vedremo spesso nel capitolo nella discussione dei teoremi e degli esempi:

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

 **Definizione 132:** Funzione Lipschitziana

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto del tipo

$$(t, y) \mapsto f(t, y)$$

Si dice **(Localmente) Lipschitziana** nella variabile  $y$  (uniformemente alla prima) se vale la seguente

$$\forall k \subseteq A \text{ compatto}, \exists L_k > 0 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_k |y_1 - y_2| \\ \forall (t, y_1), (t, y_2) \in k$$

**π Teorema 47:** Teorema di Cauchy

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e  $f \in C(A) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}^y(A)$ , ovvero  $f$  localmente Lipschitziana rispetto alla variabile  $y$  (ricordiamo che eventualmente  $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$ ). Sia  $(t_0, y_0) \in A$  e siano  $a, b > 0 : R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$  e compatto. Sia infine  $M := \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)|$  e  $\delta > 0 : \delta \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ , oppure  $0 \leq \delta \leq a$  se  $M = 0$ .

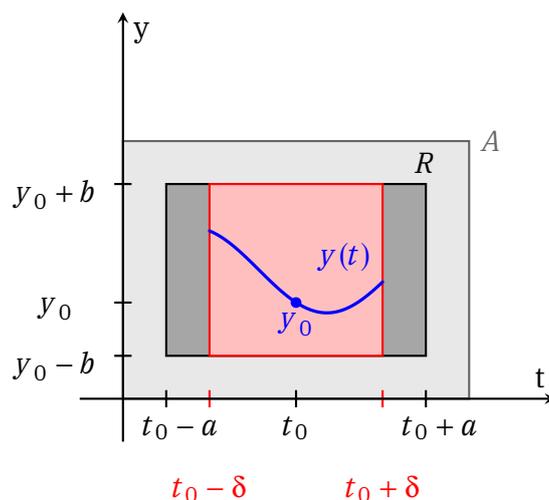
Allora esiste ed è unica una funzione

$$y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] \in C^1$$

Che è soluzione del problema di Cauchy

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Questo teorema garantisce l'unicità locale di una soluzione a un problema di Cauchy. La dimostrazione si trova più in avanti, siccome servono altre nozioni per affrontarla.



**π Teorema 48:** Teorema di Peano

Nelle stesse Ipotesi e Notazioni del [Teorema 9.1](#) ma senza assumere che  $f \in C(A) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}^y(A) \Rightarrow$  per  $\delta \in \left( 0, \min \left\{ a, \frac{b}{m} \right\} \right]$  esiste una soluzione (NON necessariamente unica) del tipo

$$y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] \in C^1$$

**π** **Proposizione 19**

Se  $f \in^1(A)$  valgono le ipotesi di Cauchy.

**✓** **Dimostrazione 33**

Sia  $k \subseteq A$  rettangolo compatto. Considero due punti a seconda variabile fissata  $(t, y_1), (t, y_2) \in k$ , e usando Lagrange

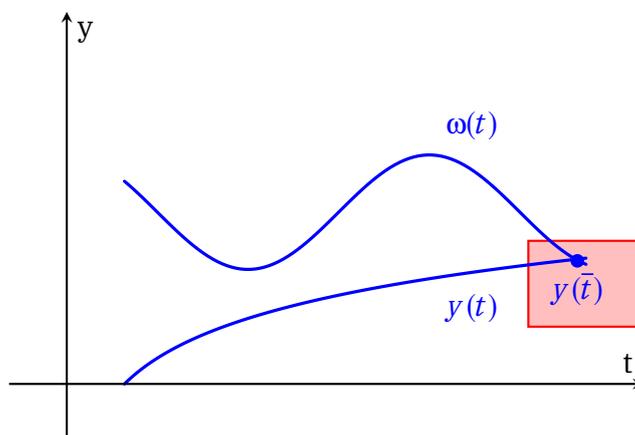
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(t, \xi)} \right| \cdot |y_1 - y_2| \leq \max_{(t, y) \in k} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(t, y)} \right| \cdot |y_1 - y_2|$$

La prima uguaglianza è vera per il **Teorema 3.7** (esiste almeno un punto in cui la derivata è uguale alla differenza della funzione calcolata negli estremi dell'intervallo diviso la differenza degli estremi stessi) in una dimensione usato su  $y$ . La disuguaglianza a destra invece è vera per Weistrass, ovvero il **Teorema 3.8.2**, che dice che la funzione ammette minimo nell'intervallo. Chiamato questo minimo  $L_k$  poichè esso dipende dall'Intervallo abbiamo

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_k \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in k$$

Che è la condizione di Lipschitzianità.

Conseguenza dell'unicità dell'esistenza della soluzione è che due soluzioni distinte di uno stesso problema di Cauchy non possono mai incontrarsi. Se così fosse verrei meno alla condizione di esistenza unica nell'intorno di  $y_0$ .



## 9.2 Tipi di Equazioni

**Definizione 133:** Equazione a Variabili separabili

Un'Equazione Differenziale a **Variabili Separabili** è del tipo

$$y'(t) = g(t)h(y(t)), \quad \begin{cases} g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \text{ continue} \quad (9.3)$$

Anche qui posso ragionare con i teoremi visti sopra. Se per esempio  $h \in C^1(J)$  sono nelle condizioni di Cauchy perchè  $f, \partial_y f$  sono continue.

**Definizione 134:** Equazione "omogenee"

Le equazioni "omogenee" (questo termine fa confondere, non lo useremo mai) sono del tipo

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad (9.4)$$

Per risolvere queste equazioni faccio un cambio di variabile, ovvero  $z(t) := \frac{y(t)}{t}$ . A questo punto ne calcolo la derivata:

$$z'(t) = \frac{y'(t) \cdot t - y(t)}{t^2} = \frac{\overbrace{f\left(\frac{y(t)}{t}\right)}^{=f(z(t))} \cdot \cancel{t} - \frac{y(t)}{t} \cancel{t}}{t^{\cancel{2}}} = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t}$$

E questa è un'equazione a variabili separabili, quindi posso risolverla e fare la funzione inversa. Per far sì che questa cosa funzioni però ho bisogno di  $t \neq 0$  ovviamente.

**Definizione 135:** Equazioni lineari del 1° ordine

Le **Equazioni lineari del 1° ordine** sono del tipo

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad a, b \in C^1(I) \quad (9.5)$$

La loro formula di risoluzione è

$$y(t) = e^{A(t)} \cdot \left[ c + \int e^{-A(t)} b(t) dt \right], \quad \begin{cases} t \in I \\ A(t) = \int a(t) dt \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.6)$$

**Definizione 136:** Equazione di Bernoulli

L'**Equazione di Bernoulli** è del tipo

$$y'(t) = \tilde{a}(t)y(t) + \tilde{b}(t)y^\alpha(t), \quad \tilde{a}, \tilde{b} \in C(I), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad (9.7)$$

Inoltre al variare del parametro  $\alpha$  abbiamo che:

- $\alpha > 0 \implies y(t) \equiv 0$  è soluzione;
- $\alpha < 0 \implies y(t) \equiv 0$  non è soluzione. Non solo, ma  $y(t) \neq 0 \forall t \in I_y$ .

Per risolvere questo tipo di equazione divido per  $y^\alpha(t)$  e ottengo  $\tilde{a}(t)y^{1-\alpha}(t) + \tilde{b}(t)$ . Siccome voglio qualcosa di lineare, anche qui prendo una variabile ausiliaria, ovvero  $z(t) := y^{1-\alpha}(t)$

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1 - \alpha)y^{-\alpha}(t) \cdot y'(t) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(t) \cdot \left[ \overbrace{\tilde{a}(t)y^{1-\alpha}(t) + \tilde{b}(t)}^{=y'(t)} \right] \\ &= (1 - \alpha)\tilde{a}(t)y^{1-\alpha}(t) + (1 - \alpha)\tilde{b}(t)y^{\alpha-\alpha}(t) \\ z'(t) &= \underbrace{(1 - \alpha)\tilde{a}(t)z(t)}_{=a(t)} + \underbrace{(1 - \alpha)\tilde{b}(t)}_{=b(t)} \end{aligned}$$

E quindi abbiamo un'equazione lineare del primo ordine. Per tornare indietro ma faccio attenzione al segno che va scelto in base al dato iniziale (se viene fornito), siccome:

$$y(t) = \pm z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

## 9.3 Teoremi di Esistenza Globale

Prima di enunciare i Teoremi di Esistenza globale (e quello dell'asintoto) dobbiamo dare qualche definizione.

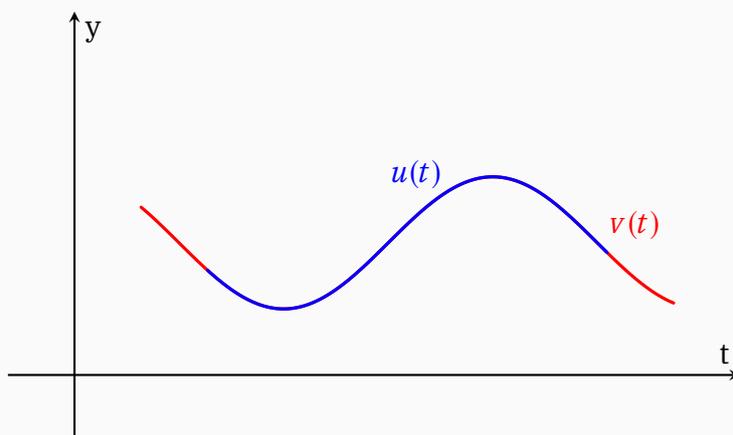
### **Definizione 137:** Prolungamento

Sia  $u : I_u \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ con } \begin{cases} f \in C^1(A) \\ A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \end{cases}$$

Allora la funzione  $v : I_v \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **Prolungamento** di  $u$  se valgono:

- $I_u \subseteq I_v$ ;
- $u(t) \equiv v(t) \forall t \in I_u$ ;
- $v(t)$  soluzione.



### **Definizione 138:** Soluzione Massimale

Sia  $y : I_y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ con } \begin{cases} f \in C^1(A) \\ A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \end{cases}$$

Essa è detta **Soluzione Massimale** se non ammette prolungamenti non banali (se stesso) e  $I_y$  è **Intervallo Massimale**.

**$\pi$  Teorema 49**

In Ipotesi di Peano, ogni problema di Cauchy ammette almeno una soluzione massimale.

In Ipotesi di Cauchy (HP) essa è unica.

L'intervallo massimale è inoltre aperto:

$$I_{\max} = \left( \begin{array}{cc} T_{\min} & T_{\max} \\ \in[-\infty, +\infty) & \in(-\infty, +\infty] \end{array} \right) \quad (9.8)$$

D'ora in poi tratteremo solo soluzioni massimali.

 **$\equiv$  Definizione 139: Soluzioni Globali**

Sia  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  aperto. Diremo che una soluzione di soluzione di  $y'(t) = f(t, y(t))$  è:

- **Globale** se  $I_{\max} = I (= T_{\min}, T_{\max})$ ;
- **Globale in Avanti** se  $T_{\max} = \sup I$ ;
- **Globale Indietro** se  $T_{\min} = \inf I$ .

 **$\pi$  Teorema 50: Teorema di Esistenza Globale 1**

Sia  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  aperto che soddisfa le Ipotesi di Cauchy. Sia  $x(t)$  soluzione massimale di

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supponendo che esistano  $c, d : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue e tali che

$$|f(t, x)| \leq c(t)|x| + d(t) \begin{cases} \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}; \\ \forall (t, x) \in [t_0, \sup I) \times \mathbb{R}; \\ \forall (t, x) \in (\inf I, t_0] \times \mathbb{R}; \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} I_{\max} = I \text{ cioè } x \text{ è globale;} \\ T_{\max} = \sup I \text{ cioè } x \text{ è globale in avanti;} \\ T_{\min} = \inf I \text{ cioè } x \text{ è globale indietro;} \end{cases}$$

Ovviamente se  $|f(t, x)| \leq c \in \mathbb{R}^+$  vale lo stesso, con  $d(t) \equiv 0 \equiv c(t)$ .

**π Teorema 51:** Teorema dell'Asintoto

Sia  $y : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \in C^1 : \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = l \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) \end{cases}$ , allora il limite della derivata è

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$$

Vale lo stesso quando i limiti tendono a  $-\infty$ , ma i segni devono essere sempre concordi come sopra per tutti i limiti (anche quello della tesi).

**✓ Dimostrazione 34**

Consideriamo un punto  $y(n+1)$  e  $y(n)$ . Essi formano un intervallo, e per Lagrange

$$y(n+1) - y(n) = y'(\xi_n) \cdot (n+1 - n) = y'(\xi_n)$$

Facendo tendere  $t \rightarrow +\infty$  troviamo che a sinistra i punti tendono allo stesso punto ovviamente, mentre a destra ho la derivata della funzione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(\xi_n) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(n+1) - y(n)) = l - l = 0$$

**📄 Esempio 38**

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \arctan [t \cdot y(t)] \\ y(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

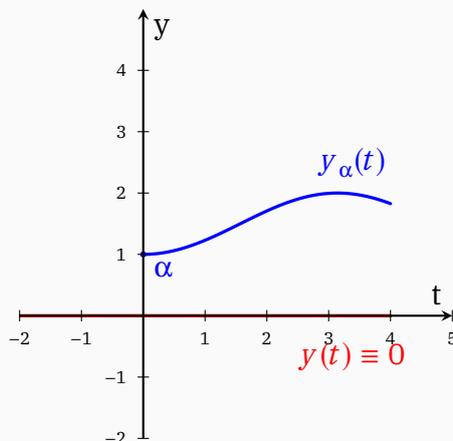
Innanzitutto la funzione  $f : \arctan(ty) \in C^1(\mathbb{R}^2)$  quindi è in ipotesi di Cauchy, allora esiste ed è unica una soluzione locale  $\forall \alpha > 0$ .

Notiamo poi che ci sono delle soluzioni costanti, queste si trovano ponendo la derivata pari a 0, ma in questo caso si nota come l'unica soluzione costante sia  $y(t) \equiv 0$ , perchè non ci sono altri valori di  $t$  o di  $y$  che rendono la derivata sempre nulla. Questo vuol dire anche che, per il dato iniziale, siccome due soluzioni non si incontrano mai:

$$y_\alpha > 0 \forall t \in I_\alpha$$

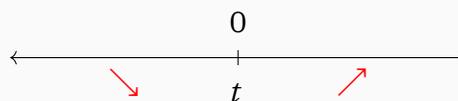
📄 Esempio 38 continued

A meno che  $\alpha$  non sia 0, ma così non è per come è dato il problema.



Cosa possiamo dire a questo punto sul comportamento della funzione? Magari anche senza studiarla, siccome potrebbe risultare difficile in alcuni casi (non questo). Abbiamo la derivata, quindi studiamone il segno

$$\arctan(ty) > 0 \iff t > 0 \implies$$



Quindi la funzione decresce fino a 0, in cui vale  $\alpha$  e poi cresce. Il disegno sopra è quindi parzialmente sbagliato, ma esso serve solo a capire che la funzione parte da  $\alpha$  e poi non si incontra mai con l'asse  $x$ . Inoltre abbiamo scoperto non decresce mai da 0 in poi. Essendo monotona la funzione, esiste il limite per  $\rightarrow \pm\infty$ . Per calcolarlo anche senza conoscere la funzione usiamo il teorema dell'asintoto: per la monotonia il limite esiste, supponiamo che sia finito, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = l \in \mathbb{R}$$

Allora il limite della derivata (che noi abbiamo) deve fare 0, vediamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(ty) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y(t) \neq 0; \\ 0 & \text{se } y(t) \equiv 0; \end{cases}$$

Siccome stiamo esplorando la prima ipotesi, questo crea un assurdo con il teorema dell'asintoto, quindi il limite della funzione è  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \pm\infty$  ma essendo la funzione monotona, il limite ha segno positivo. Lo stesso vale dall'altro lato. Studiando la derivata seconda si vede poi facilmente che è sempre positiva. La funzione si comporta quindi come una parabola.

**π Teorema 52:** Teorema di Esistenza Globale 2

Sia  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  aperto che soddisfa le Ipotesi di Cauchy. Sia  $y : I_{\max} \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione massimale di  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Sia infine  $t_0 \in I_{\max}$ :

$$\text{Se } \exists c > 0 : |y(t)| \leq c \begin{cases} \forall t \in I_{\max}; \\ \forall t \in [t_0, \sup I); \\ \forall t \in (\inf I, t_0]; \end{cases} \implies \begin{cases} I_{\max} = I; \\ T_{\max} = \sup I; \\ T_{\min} = \inf I; \end{cases}$$

## 9.4 Dimostrazione Cauchy

Dedichiamo un'intera sezione alla dimostrazione del Teorema di Cauchy. Prima però, non bisogna mai dimenticare il legame che lega Fisica e Metafisica, che ha aiutato molti dei padri fondatori della nostra materia di studio a superare le interperie. Forti di questa convinzione, preghiamo affinché non ci venga mai chiesto questo Teorema all'esame orale. Bene, procediamo. Riscriviamo il Teorema per comodità.

### $\pi$ Teorema 53: Teorema di Cauchy

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e  $f \in C(A) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}^y(A)$ , ovvero  $f$  localmente Lipschitziana rispetto alla variabile  $y$  (ricordiamo che eventualmente  $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$ ). Sia  $(t_0, y_0) \in A$  e siano  $a, b > 0 : R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$  e compatto. Sia infine  $M := \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)|$  e  $\delta > 0 : \delta \leq \min \{a, \frac{b}{M}\}$ , oppure  $0 \leq \delta \leq a$  se  $M = 0$ .

Allora esiste ed è unica una funzione

$$y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] \in C^1$$

Che è soluzione del problema di Cauchy

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

### ✓ Dimostrazione 35

Dividiamo in più passi.

- Il primo passo è la formulazione dell'integrale. Quello che voglio dimostrare è che  $y \in C^1(I_\delta)$  risolve  $(P) \iff y \in C^0(I_\delta)$  risolve anche  $(C)$ , ovvero

$$(C) : y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in I_\delta \quad (9.9)$$

Perché vogliamo dimostrarlo? Troppe domande giovane Padawan. Suppongo  $y \in C^1$  quindi è continua, e per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (TFCI) ho che

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s) ds$$

Questo può non essere immediato. Il primo enunciato del teorema del calcolo integrale assicura semplicemente che la funzione integrale  $Y$  è derivabile in ogni punto, e che sempre in ogni punto vale

$$Y'(t_0) = y(t_0)$$

## ✓ Dimostrazione 35 continued

Quindi posso fare l'integrale. Dopo questa premessa fondamentale per poter scrivere quello che abbiamo scritto sopra, in realtà stiamo dicendo che  $0=0$  siccome svolgendo l'integrale

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s) ds \longrightarrow y(t) = \cancel{y(t_0)} + y(t) - \cancel{y(t_0)}$$

Detto questo, siccome  $y'(s)$  risolve  $f(t, y(t))$  perchè il problema di Cauchy è strutturato in questo modo, e siccome per lo stesso motivo  $y(t_0) = y_0$  possiamo trasformare l'identità di prima in

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in I_\delta$$

Questo ovviamente vale solo dentro  $I_\delta$  ovvero dove la funzione risolve  $f$ . Ricordiamoci che stiamo per ora supponendo che la tesi del teorema sia vera per costruire la condizione dell'Integrale. Per il viceversa, essendo sicuramente  $y \in C^0(I_\delta)$  e anche  $f \in C^0$  la funzione composta

$$s \mapsto f(s, y(s))$$

È a sua volta continua. Sempre per il TFCI allora  $y \in C^1(I_\delta)$ . Oltre a tutto quello che abbiamo detto fin ora, se deriviamo (C) ovvero **Equazione 9.9** vediamo che

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right] = 0 + f(t, y(t))$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Valutando poi in  $t_0$  ho che  $y(t_0) = y_0$  e questo vale  $\forall t \in I_\delta$ , quindi  $y \in C^1(I_\delta)$  ed essa risolve (C), oltre a risolvere (P) per quanto abbiamo assunto all'inizio. Abbiamo finito il primo punto, asciugiamoci il sudore.

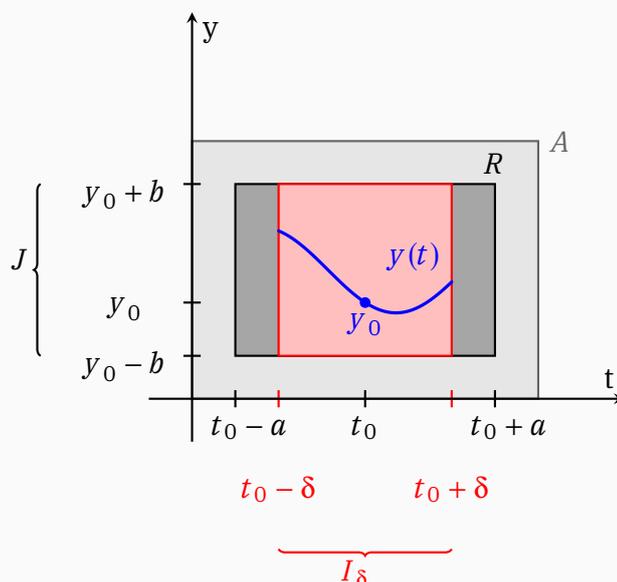
- Definiamo adesso una successione di funzioni per ricorrenza fatta così:

$$\begin{cases} y_0(t) := y_0 \\ y_{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds \end{cases}$$

Questa si chiama **Iterate di Picard**. Prima di vedere che converge bisogna anche dimostrare che è ben definita sennò non posso avere la sicurezza di calcolare  $y_{k+1}(t)$  perchè questi potrebbero cadere fuori da  $A$  e quindi non potrei calcolare  $y_{k+2}$  (o meglio magari posso, ma in questo caso non mi servono a niente, il teorema si basa sullo stare dentro l'insieme, devo mantenere questa condizione). Devo controllare banalmente che  $f(s, y(s)) \in A \forall s$ . Dimostro invece una cosa più

## ✓ Dimostrazione 35 continued

forte, ovvero che la funzione è contenuta non dentro  $R$ , ma dentro il rettangolo ancora più piccolo, ovvero che  $(s, y_k(s)) \in I_\delta \times J \subseteq R \subseteq A \forall s$ .



E lo dimostriamo per induzione:

- Per  $k = 0$  ho che  $y_k(s) = y_0(s) \equiv y_0$ , quindi ok. Inoltre siccome  $s \in I_\delta$  c'è bisogno anche che  $y_k(s) \in J$ , e questo vale per  $y_0$ ;
- Supposto tutto vero per  $k$ , consideriamo  $k + 1$ , in particolar modo la differenza tra questo e  $y_0$  (che deve ricadere nell'intervallo):

$$\left| y_{k+1}(t) - y_0 \right| = \left| \cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds - \cancel{y_0} \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, y_k(s))| ds \right|$$

E anche se non sono sicuro che  $y_{k+1}$  ricada nell'intervallo,  $y_k$  invece si per ipotesi induttiva, e anche  $s$  per ovvia ipotesi. Quindi sempre per ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} |f| \leq M &= \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)| \longrightarrow \\ \longrightarrow |y_{k+1}(t) - y_0| &\leq \left| \int_t^{t_0} |f(s, y_k(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \end{aligned}$$

Questo deriva dalla disuguaglianza del modulo di integrali visto in Analisi 1, e dal fatto che il modulo della funzione è sicuramente minore o uguale al suo massimo. Inoltre siccome il punto  $t - t_0$  si trova sicuramente in  $I_\delta$ , è immediato che  $|t - t_0| \leq \delta$ , poichè quest'ultimo è per ipotesi maggiore di 0.

✓ Dimostrazione 35 continued

Inoltre sempre per ipotesi  $\delta \leq \min \{a, \frac{b}{M}\}$ , quindi

$$|y_{k+1}(t) - y_0| \leq \left| \int_t^{t_0} |f(s, y_k(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq M \frac{b}{M}$$

$$|y_{k+1}(t) - y_0| \leq b \quad \forall t \in I_\delta$$

E quindi ovviamente tutti i punti della successione ricadono in  $J$  (vedi figura).  
La definizione è ben posta.

Vediamo la convergenza della successione. Per questa definisco un'altra serie di funzioni ancora, partendo da una cosa abbastanza ovvia, ovvero che

$$y_k(t) = \cancel{y_0(t)} + \left[ \cancel{y_1(t)} - \cancel{y_0(t)} \right] + \left[ \cancel{y_2(t)} - \cancel{y_1(t)} \right] + \dots + \left[ y_k(t) - \cancel{y_{k-1}(t)} \right] = y_k(t)$$

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} g_j(t)$$

In cui

$$g_j(t) := y_{j+1}(t) - y_j(t)$$

E se facciamo vedere che questa serie converge totalmente in  $I_\delta$ , allora nello stesso intervallo convergerà anche uniformemente e con strani magheggi e passando al limite saremo in grado di vedere come  $y(t)$  risolve l'equazione differenziale. Vediamo però prima la convergenza totale, sennò rischiamo di confonderci o di illuderci tristemente di essere giunti di già alla conclusione. Quello che dobbiamo dimostrare è, siccome  $y_0$  è un numero finito, che

$$\sum_{j \geq 0} \underbrace{\sup_{t \in I_\delta} |g_j(t)|}_{=M_j} < \infty$$

Per farlo, per quanto possa sembrare folle, stimiamo il modulo dei primi punti della successione:

$$|g_0(t)| = |y_1(t) - y_0(t)| = \left| \cancel{y_0} + \int_t^{t_0} f(s, y_0) ds - \cancel{y_0} \right| \leq M\delta$$

E questo senza scrivere tutti i passaggi deriva da quanto fatto poco fa per la differenza dei due punti che dovevano ricadere nell'intervallo. Il primo punto della successione invece è un po' diverso:

✓ Dimostrazione 35 continued

$$\begin{aligned} |g_1(t)| &= |y_2(t) - y_1(t)| = \left| \int_t^{t_0} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_0)] ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_t^{t_0} \underbrace{f(s, y_1(s))}_{\in R} - \underbrace{f(s, y_0)}_{\in R} ds \right| \end{aligned}$$

Da qui usiamo la Lipschitzianità come password molto forte del WI-FI e per dire che dati due punti qualsiasi in  $A$  e a maggior ragione in  $R$  (Ricordiamo che  $f$  è localmente Lip in  $A$  nella seconda variabile) allora

$$\left| \underbrace{f(s, y_1(s))}_{\in R} - \underbrace{f(s, y_0)}_{\in R} \right| \leq L|y_1(s) - y_0| \leq LM\delta$$

Sempre per la distanza dei punti che è minore di  $M\delta$ , quindi mettendo insieme queste informazioni

$$|g_1(t)| \leq M\delta L|t - t_0| \leq M\delta(L\delta) \quad \forall t \in I_\delta$$

Se passiamo al secondo punto della successione, con gli stessi passaggi e sempre considerando la Lipschitzianità abbiamo che

$$\begin{aligned} |g_2(t)| &= |y_3(t) - y_2(t)| \leq \left| \int_t^{t_0} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L|y_2(s) - y_1(s)| \cdot |t - t_0| \leq M\delta(L\delta)^2 \end{aligned}$$

Questo perchè come abbiamo visto prima  $|g_1(t)| = |y_2(t) - y_1(t)| \leq M\delta(L\delta)$  quindi basta sostituire questo e ricordarsi che come prima  $|t - t_0| \leq \delta$ . Notiamo che andando avanti stiamo solo aggiungendo  $L\delta$ , e possiamo scrivere che più in generale

$$g_j(t) \leq M\delta \cdot (L\delta)^j \implies \underbrace{\sup_{t \in I_\delta} |g_j(t)|}_{=M_j} \leq M\delta(L\delta)^j$$

E quindi la serie sugli  $M_j$  è minore di una serie che converge, siccome

$$0 \leq \sum_{j \geq 0} M_j \leq \sum_{j \geq 0} M\delta(L\delta)^j = M\delta \sum_{j \geq 0} (L\delta)^j$$

E siccome  $\delta \leq 1/L$  per ipotesi, la serie converge e quindi anche gli  $M_j$ , e quindi anche  $g_k$ , sia totalmente che uniformemente in  $I_\delta$ . Dimostrata la convergenza, siamo in grado di dimostrare come la funzione risolve l'equazione. Per farlo

✓ Dimostrazione 35 continued

vediamo che

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} g_j(t) \Rightarrow y_0 + \sum_{j \geq 0} g_j(t) := y(t) \text{ in } I_\delta$$

Ricordiamo, per evitare la confusione già alta, che non abbiamo ancora incontrato nessuna funzione  $y(t)$  (che è quella che risolve l'equazione delle ipotesi), bensì avevamo solo visto come questa risolve l'equazione solo se è anche uguale all'integrale formulato prima, nell'ipotesi in cui questa funzione esista, che avevamo dato un po' per scontato. Quindi stiamo in realtà definendo la funzione del punto di arrivo per la prima volta in questo momento.

Siccome poi  $y_k \in C^0(I_\delta) \implies y \in C^0(I_\delta)$  per il teorema di continuità del limite. Adesso possiamo ripescare la successione di funzioni definita all'inizio e vedere come facendone il limite per  $k \rightarrow +\infty$  troviamo

$$\begin{array}{ccc} y_{k+1}(t) & = & y_0 + \int_t^{t_0} f(s, y_k(s)) ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ y(t) & = & y_0 + \int_t^{t_0} f(s, y(s)) ds \end{array} \quad (9.10)$$

Però a differenza dei primi due, il limite sull'integrale non è scontato. Dobbiamo quindi applicare il Teorema di Lebesgue. Chiamiamo allora la successione di funzioni provvisoria  $\tilde{f}_k(s) := f(s, y_k(s))$  e  $\tilde{f}(s) := f(s, y(s))$ . La condizione per il teorema è di *dominare* tale successione, ovvero

$$|\tilde{f}_k(s)| \leq h(s) \text{ sommabile in } I_\delta \longrightarrow h(s) \equiv M$$

Quindi abbiamo trovato la funzione che maggiore, o meglio che domina la successione, ovvero il suo massimo. Inoltre  $\tilde{f}_k \longrightarrow \tilde{f}$  per come l'ho costruita con  $s \in I_\delta$  perchè  $y_k \longrightarrow y$  e  $f$  è continua, quindi posso passare al limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_t^{t_0} \tilde{f}_k(s) ds = \int_t^{t_0} \tilde{f}(s) ds = \int_t^{t_0} f(s, y(s)) ds$$

Quindi la relazione 9.10 vale, e per la condizione dettata al primo punto della dimostrazione, la funzione  $y(t)$  risolve il problema di Cauchy (P).

## ✓ Dimostrazione 35 continued

- Pensavamo di aver finito, ma dobbiamo ancora far vedere come questa soluzione sia unica in  $I_\delta$ . Supponiamo quindi per assurdo che esistano le due funzioni

$$\begin{cases} x : I_\delta \rightarrow J \\ y : I_\delta \rightarrow J \end{cases} \in C^1$$

Entrambe soluzioni di (P) e tali che  $x(t) \neq y(t)$ , allora valutando la loro distanza:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\stackrel{\text{Verificano (C)}}{=} \left| \cancel{y_0} + \int_t^{t_0} f(s, x(s)) ds - \cancel{y_0} - \int_t^{t_0} f(s, y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_t^{t_0} \underbrace{f(s, x(s))}_{\in R} - \underbrace{f(s, y(s))}_{\in R} ds \right| \stackrel{\text{Lip}}{\leq} \left| \int_t^{t_0} L|x(s) - y(s)| ds \right| \leq \\ &\leq L \sup_{s \in I_\delta} |x(s) - y(s)| \cdot |t - t_0| \leq (L\delta) \sup_{x \in I_\delta} |x(s) - y(s)| \end{aligned}$$

Ma quello che abbiamo trovato è che

$$|x(s) - y(s)| \leq (L\delta) \sup_{s \in I_\delta} |x(t) - y(t)|$$

In cui al secondo membro abbiamo cambiato il nome della variabile perchè sono effettivamente due funzioni diverse, per quanto fin ora le abbiamo trattate con la stessa variabile. Passando al sup però

$$\sup_{s \in I_\delta} |x(s) - y(s)| \leq (L\delta) \sup_{s \in I_\delta} |x(t) - y(t)|$$

Ma questo è possibile  $\iff x(t) = y(t) \forall t \in I_\delta$ , quindi la soluzione è localmente unica.